Fiche de calcul n° 30 029A

Structures euclidiennes

Prérequis
Produit scalaire, famille orthogonale, base orthonormée.

Calcul de produits scalaires

Calcul 30.1 — Des calculs de produits scalaires de fonctions.

Calculer les produits scalaires entre les vecteurs suivants dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ les éléments de E suivants :

$$f_1 : t \longmapsto \ln(1+t), \qquad f_2 : t \longmapsto t^2, \qquad f_3 : t \longmapsto \cos t,$$
$$f_4 : t \longmapsto e^t, \qquad f_5 : t \longmapsto 1+t, \qquad f_6 : t \longmapsto 2.$$

a) $\langle f_1, f_6\rangle$ ....

b) $\langle f_2, f_5\rangle$ ....

c) $\langle f_3, f_5\rangle$ ....

d) $\langle f_4, f_4\rangle$ ....

Calcul 30.2 — Des calculs de produits scalaires de matrices.

Calculer les produits scalaires suivants dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

On notera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\langle A, B\rangle$ ....

b) $\langle B, B\rangle$ ....

c) $\langle B, C\rangle$ ....

Distances euclidiennes

Calcul 30.3 — Des calculs de distances.

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer la distance de X^2 à $\mathrm{Vect}(1, X)$ ....

b) Calculer la distance de X à $\mathrm{Vect}(1, X^3)$ ....

c) Calculer la distance de $1 + X^2$ à $\mathrm{Vect}(X, X^2)$ ....

Orthonormalisation

Calcul 30.4 — **Orthonormalisation de Gram-Schmidt.**

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}x$.

En appliquant le processus de Gram-Schmidt :

a) calculer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(1, X)$ ....

b) calculer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(X, X^2+1)$ ....

Matrices de projections orthogonales et de symétries orthogonales

Calcul 30.5 — **Calculs de matrices.**

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, qu'on munit d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
On note x, y et z les coordonnées dans cette base.
Pour chacune des applications linéaires suivantes, écrire sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

a) La projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$ ....

b) La projection orthogonale sur la droite D dirigée par $i + 2k$ ....

c) La symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 3y - z = 0$ ....

Réponses mélangées

$2\sin(1) + \cos(1) - 1$ $\quad \dfrac{1}{3}$ $\quad \left(\sqrt{3}X, \sqrt{\dfrac{240}{43}}\left(X^2 - \dfrac{9}{4}X + 1\right)\right)$ $\quad \left(1, 2\sqrt{3}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)\right)$

$4\ln 2 - 2$ $\quad \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{1}{2}(e^2 - 1)$

$\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{7}{12}$ $\quad 11$ $\quad \dfrac{1}{6\sqrt{5}}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -7 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad 10$

► Réponses et corrigés page 176

Fiche n° 30. Structures euclidiennes

Réponses

30.1 a) .... $\boxed{4\ln 2 - 2}$

30.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{12}}$

30.1 c) .... $\boxed{2\sin(1) + \cos(1) - 1}$

30.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}(e^2 - 1)}$

30.2 a) .... $\boxed{11}$

30.2 b) .... $\boxed{10}$

30.2 c) .... $\boxed{0}$

30.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6\sqrt{5}}}$

30.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5\sqrt{3}}}$

30.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

30.4 a) .... $\boxed{(1, 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}))}$

30.4 b) .... $\boxed{(\sqrt{3}X, \sqrt{\frac{240}{43}}(X^2 - \frac{9}{4}X + 1))}$

30.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

30.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

30.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & -7 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}}$

Corrigés

30.1 a) On calcule : $\langle f_1, f_6\rangle = \displaystyle\int_0^1 2\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on a le choix : première possibilité faire une intégration par parties, seconde possibilité utiliser une primitive connue de ln (sur $\mathbb{R}_+^*$) qui est $t \longmapsto t\ln t - t$ et on a alors besoin de faire un changement de variable. Si on applique la seconde technique, on trouve

$$\langle f_1, f_6\rangle = \int_0^1 2\ln(1+t) = 2\int_1^2 \ln(t) = 2\Big[t\ln t - t\Big]_1^2 = 4\ln 2 - 2.$$

....

30.1 b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^2(1+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 + t^3\,\mathrm{d}t$.

....

30.1 c) On calcule : $\displaystyle\int_0^1 \cos(t)(1+t)\,\mathrm{d}t$. Par intégration par parties, on a

$$\int_0^1 \cos(t)(1+t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2\sin(1) + \cos(1) - 1.$$

....

30.1 d) On calcule : $\displaystyle\int_0^1 e^t e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2t} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

....

30.2 a) On calcule $\mathrm{tr}(A^\top B) = 11$. On pouvait aussi faire la somme des produits des coefficients de A et de B, puisque

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ij}$$

si A et B sont deux matrices carrées de taille n.

....

30.2 b) $\mathrm{tr}(B^\top B) = 10$

....

30.2 c) Le calcul est inutile, il s'agit du produit scalaire entre une matrice symétrique et une matrice antisymétrique. Ces deux matrices sont orthogonales donc le produit scalaire est nul.

....

30.3 a) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(1,X)}(X^2)$ de X^2 sur $\mathrm{Vect}(1, X)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a + bX = p_{\mathrm{Vect}(1,X)}(X^2) \iff \begin{cases} \langle X^2 - (a+bX),\ 1\rangle = 0 \\ \langle X^2 - (a+bX),\ X\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1/6 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| X^2 - \left(X - \dfrac{1}{6}\right) \right\| = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}$.

....

30.3 b) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(1,X^3)}(X)$ de X sur $\mathrm{Vect}(1, X^3)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$a + bX^3 = p_{\mathrm{Vect}(1,X^3)}(X) \iff \begin{cases} \langle X - (a+bX^3),\ 1\rangle = 0 \\ \langle X - (a+bX^3),\ X^3\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4/15 \\ b = 14/15 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| X - \left(\dfrac{4}{15} + \dfrac{14}{15}X^3\right) \right\| = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$.

....

30.3 c) Pour calculer la distance demandée, on va faire le calcul du projeté orthogonal $p_{\mathrm{Vect}(X,X^2)}(1+X^2)$ de $1+X^2$ sur $\mathrm{Vect}(X, X^2)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$aX + bX^2 = p_{\mathrm{Vect}(X,X^2)}(1+X^2) \iff \begin{cases} \langle 1 + X^2 - (aX+bX^2),\ X\rangle = 0 \\ \langle 1 + X^2 - (aX+bX^2),\ X^2\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -7/3 \end{cases}.$$

Alors la distance cherchée est $\left\| 1 + X^2 - \left(4X - \dfrac{7}{3}X^2\right) \right\| = \dfrac{1}{3}$.

....

30.4 a) Appliquer le processus de Gram-Schmidt.

....

30.4 b) Appliquer le processus de Gram-Schmidt.

....

30.5 a) Une base orthonormale de $P^\perp$ est $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$. Donc la matrice dans la b.o.n $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $P^\perp$ est AA^T où A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (car u est une b.o.n de l'espace sur lequel on projette et $\mathcal{B}$ est une b.o.n de l'espace). Donc la matrice dans la b.o.n $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $P^\perp$ est $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice cherchée est $I_3 - M$.

....

30.5 b) Une base orthonormale de D est $v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(i + 2k)$ donc la matrice de la projection orthogonale sur D dans la base $\mathcal{B}$ est AA^T où A est la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ *i.e.* $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

....

30.5 c) La symétrie σ de l'énoncé vérifie $\sigma = id - 2\pi$ où π est la projection orthogonale sur la droite dirigée par le vecteur $i + 3j - k$. Or la matrice P de π dans la base $\mathcal{B}$ est $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la matrice cherchée est $\mathrm{I}_3 - 2P$.

....