Fiche de calcul n° 18

0017A

Sommes et produits

Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carré, logarithme népérien).

Si q est un nombre réel et si $(m,n) \in {\mathbb{N}^*}^2$ et $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 18.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 18.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tel que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Changements d'indice

Calcul 18.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes télescopiques, produits télescopiques

Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

Calcul 18.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

Décomposition en éléments simples

Calcul 18.7

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommation par paquets

Calcul 18.8

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 18.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

Réponses mélangées

$3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\quad \dfrac{n^2(n+1)}{2}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{n(5n+1)}{2}$ $\quad \dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)$ $\quad \dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}$

$1-4n^2$ $\quad \dfrac{n+1}{2n}$ $\quad \dfrac{1}{n}$ $\quad \dfrac{n(n^2-1)}{2}$ $\quad 1-\dfrac{1}{n+1}$ $\quad n2^{n+1}+2(1-2^n)$ $\quad 2n^2+n$

$\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ $\quad \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad 5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}$ $\quad n+1$ $\quad 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{n+1}{2n}$

2^{q-p+1} $\quad (n+1)!-1$ $\quad \dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)$ $\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}$ $\quad \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\dfrac{n(n+3)}{4}$ $\quad \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad n(n+1)(n^2+n+4)$ $\quad n(n+2)$ $\quad \dfrac{(n-2)(n-7)}{6}$ $\quad \ln(n+1)$

$(n+2)^3-2^3$ $\quad \dfrac{n(3n+1)}{2}$ $\quad \dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)$ $\quad \dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$ $\quad 1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

▶ Réponses et corrigés page 134

Fiche n° 18. Sommes et produits

Réponses

18.1 a) .... $\boxed{n(n+2)}$

18.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

18.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(5n+1)}{2}}$

18.1 d)......... $\boxed{\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}}$

18.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

18.2 b)... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

18.2 c) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

18.2 d) .... $\boxed{5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}}$

18.2 e)... $\boxed{\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)}$

18.2 f) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

18.3 a)................. $\boxed{2^{q-p+1}}$

18.3 b) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

18.3 c)................ $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

18.3 d) .... $\boxed{0}$

18.4 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

18.4 b) .... $\boxed{0}$

18.4 c)...... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

18.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

18.5 a) .... $\boxed{(n+2)^3-2^3}$

18.5 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

18.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

18.5 d)............ $\boxed{(n+1)!-1}$

18.6 a) .... $\boxed{n+1}$

18.6 b)................ $\boxed{1-4n^2}$

18.6 c)...................... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

18.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

18.7 a).............. $\boxed{1-\dfrac{1}{n+1}}$

18.7 b)............. $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+3}}$

18.8 a)................ $\boxed{2n^2+n}$

18.8 b) .... $\boxed{\dfrac{n(3n+1)}{2}}$

18.9 a) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)}{2}}$

18.9 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{4}}$

18.9 c).............. $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

18.9 d) .. $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

18.9 e)......... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

18.9 f)....... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

18.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

18.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

18.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n} k + (n-1)\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

18.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1} k \;-\; 4\sum_{k=2}^{n-1} 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

18.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

18.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\big(4k(k^2+2)\big) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

18.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2\frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

18.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}.$$

18.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(7^k + 4k - n + 2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1) + n + 4.$$

18.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

18.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

18.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \cdots \times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

18.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

18.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

18.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n} n+1-k = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

18.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

18.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n) \end{aligned}$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

18.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

18.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

18.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

18.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

18.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)\times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

18.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k} = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \cdots \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n+1}{1} = n+1$.

18.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} &= \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-1} \times \frac{2n+1}{2n-1} \\ &= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2. \end{aligned}$$

18.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \cdots \times \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n}$.

18.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

18.7 a) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.7 b) D'après la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k+2} + \dfrac{b}{k+3}$. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$, en reconnaissant une somme télescopique.

18.8 a) Séparons les termes d'indices pairs et impairs. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k^2 + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1) k^2 \\
&= \sum_{p=0}^{n} (2p)^2 - \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1)^2 = \sum_{p=0}^{n} 4p^2 - \sum_{p=0}^{n-1} \big(4p^2 + 4p + 1\big) \\
&= \underbrace{4\sum_{p=0}^{n} p^2 - 4\sum_{p=0}^{n-1} p^2}_{=4n^2} - 4\sum_{p=0}^{n-1} p - \sum_{p=0}^{n-1} 1 = 4n^2 - 4\frac{n(n-1)}{2} - n = 2n^2 + n.
\end{aligned}$$

18.8 b) Séparons les termes plus petits que n et les autres. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n) &= \sum_{k=0}^{n} \min(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \min(k, n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} n = \frac{n(n+1)}{2} + n[2n - (n+1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

18.9 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2} n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

18.9 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

18.9 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j) &= \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} (i+j) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{3}{2}(j^2 - j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j^2\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3 \times 2 \times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

18.9 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n} 1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j} 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\left[i^2(n+1)-i^3\right] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

18.9 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

18.9 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n}\max(i,j) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$
