Fiche de calcul n° 29

Séries numériques

Prérequis
Séries usuelles (convergence et sommes), décomposition en éléments simples.

Séries géométriques, exponentielles, de Riemann

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 29.1 — Séries géométriques.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 10} \frac{1}{3^k}$ ....

Calcul 29.2 — Séries exponentielles.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k \times k!}$ ....

Calcul 29.3 — Séries de Riemann.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 6} \frac{1}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 4} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k}$ ....

Séries télescopiques

Calcul 29.4

Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2+k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right)$ ...

Séries géométriques dérivées

Prérequis

On pourra utiliser le fait que si $\alpha \in]-1,1[$, les séries

$$\sum_{k\geqslant 1} k\alpha^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\alpha^{k-2},$$

appelées *séries géométriques dérivées*, convergent et ont pour somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = \frac{1}{(1-\alpha)^3}.$$

Calcul 29.5 — Séries géométriques dérivées.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{2^{2k}}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{-(k-1)}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\frac{1}{2^{k-1}}$ ....

Calcul 29.6 — Séries géométriques dérivées – bis.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (3k+1)\frac{1}{3^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-(k-2)}$ ....

Réponses mélangées

$\frac{-2-5\sqrt{2}i}{54}$ $\quad$ $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ $\quad$ $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$ $\quad$ $\frac{1}{12}$ $\quad$ 16 $\quad$ $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ divergente $\quad$ 2

$\frac{\pi}{4}$ $\quad$ divergente $\quad$ 4 $\quad$ $\ln(2)$ $\quad$ 1 $\quad$ e^2-3 $\quad$ 2 $\quad$ e $\quad$ $\frac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}$

divergente $\quad$ $\frac{\pi^2}{6}$ $\quad$ $\frac{7-49i}{35\sqrt{2}}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2\times 3^9}$ $\quad$ $\frac{11}{4}$ $\quad$ divergente

► Réponses et corrigés page 173

Fiche n° 29. Séries numériques

Réponses

29.1 a) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.1 b) .... $\boxed{2}$

29.1 c) ...... $\boxed{\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}}$

29.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\times 3^9}}$

29.2 a) .... $\boxed{\mathrm{e}}$

29.2 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^2-3}$

29.2 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$

29.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi^2}{6}}$

29.3 b) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.3 c) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.3 d) ...... $\boxed{\dfrac{7-49i}{35\sqrt{2}}}$

29.3 e) ... $\boxed{\dfrac{-2-5\sqrt{2}i}{54}}$

29.4 a) .... $\boxed{1}$

29.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

29.4 c) .... $\boxed{\ln(2)}$

29.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

29.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$

29.5 c) .... $\boxed{\text{divergente}}$

29.5 d) .... $\boxed{4}$

29.6 a) .... $\boxed{2}$

29.6 b) .... $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

29.6 c) .... $\boxed{16}$

29.6 d) ..... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

Corrigés

29.1 a) La série est géométrique de raison $2 \notin]-1,1[$, donc elle diverge.

29.1 b) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

29.1 c) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}.$$

29.1 d) La série est géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Donc,

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

Autre solution : avec le changement d'indice $j = k-10$, on a

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{j+10}} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^{10}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

29.2 a) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{1^k}{k!}$.

29.2 b) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{2^k}{k!}$, et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$, donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} = \mathrm{e}^2-3.$

29.2 c) On a $\dfrac{1}{2^k\times k!} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ et on reconnaît donc une série exponentielle.

29.3 a) Il s'agit d'une série de Riemann convergente, et vous savez peut-être que sa somme est $\dfrac{\pi^2}{6}$; en général, si $a > 1$, on ne connaît pas la valeur exacte de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

29.3 b) Il s'agit d'une série de Riemann divergente.

29.3 c) La série harmonique diverge !

29.3 d) Il s'agit d'une série géométrique de raison $\dfrac{\mathrm{i}}{7}$ et $\left|\dfrac{\mathrm{i}}{7}\right| \in]-1,1[$, donc la série converge. De plus,

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}} = \frac{\mathrm{i}^3}{7^2} \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{7}\right)^{k-3} = \frac{\mathrm{i}^3}{7^2} \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{7}} = \frac{-\mathrm{i}}{49-7\mathrm{i}}.$$

Enfin, en multipliant par l'expression conjuguée, on trouve

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}} = \frac{-\mathrm{i}(49+7\mathrm{i})}{49^2+7^2} = \frac{1-7\mathrm{i}}{350}.$$

29.3 e) On reconnaît une série géométrique de raison $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}$ qui est de module $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$. Ainsi, la série converge. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k} &= \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^4} \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{k-4} \\ &= \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^4} \frac{1}{1-\frac{1}{1-\mathrm{i}\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}-1}{\mathrm{i}\sqrt{2}} \\ &= \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

En développant, on obtient $(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^4 = -7-4\mathrm{i}\sqrt{2}$, donc $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^4 = \dfrac{-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}}{81}$ et

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k} = \frac{-7-4\mathrm{i}\sqrt{2}}{81} \times \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \frac{-2-5\mathrm{i}\sqrt{2}}{54}.$$

29.4 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

29.4 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + 1 - \frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

29.4 c) Soit $n \geqslant 2$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n} (2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-1)) = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

29.4 d) Soit $n \geqslant 0$ fixé. On remarque que pour tout k,

$$\arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right) = \arctan(k+2) - \arctan(k+1).$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+2)-\arctan(k+1)) = \arctan(n+2) - \arctan(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$.

29.5 a) On a $\dfrac{1}{2^{2k}} = \dfrac{1}{4^k}$, donc la série est géométrique de raison $\dfrac{1}{4} \in]-1,1[$: elle converge. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} - \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12}$.

29.5 b) On a $\mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^k}$. Or la série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in]-1,1[$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^k} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

Autre solution : le changement d'indice $j = k-1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(k-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-1})^j = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

29.5 c) La série diverge grossièrement.

29.5 d) On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, donc convergente, dont la somme vaut

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

29.6 a) On a $k2^{-k} = \dfrac{1}{2}k\dfrac{1}{2^{k-1}}$; la série $\displaystyle\sum_k k\frac{1}{2^{k-1}}$ est une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$, et est donc convergente. Sa somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$.

29.6 b) La série converge comme somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in]-1,1[$ et d'une série géométrique dérivée de même raison, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1)\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{3^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{11}{4}.$$

29.6 c) On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois, de raison $\dfrac{1}{2}$, convergente, de somme $\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16$.

29.6 d) On a affaire à une série géométrique dérivée deux fois.
