Fiche de calcul n° 24

023A

Polynômes

Prérequis
Opérations sur les polynômes. Division Euclidienne. Évaluation. Racines.

Autour de la division euclidienne

Calcul 24.1 — Pour s'échauffer.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^3 + X^2 - X + 1, \quad B = X - 1$ ....

b) $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, \quad B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1, \quad B = X^3 + X^2 + 2$ ....

d) $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, \quad B = 2X^3 - X^2 - X + 1$ ....

Calcul 24.2 — Avec des degrés arbitraires.

La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^n$, $B = X - 1$ ....

b) $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$, $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$, $B = (X-2)^2$ ....

d) $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n$, $B = X^3 - 2X + 1$ ....

Calcul 24.3 — Avec des opérations.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de P par X^4 :

a) $P = A + B$ où $A = X^5 + X - 2$ et $B = X^4 + X - 1$ ....

b) $P = A \times B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $P = A \circ B$ où $A = X^2 - 3X + 1$ et $B = (X-2)^2$ ....

d) $P = A \circ B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^3 + X^2 - 2X + 1$ ....

Calcul 24.4 — Pour évaluer en un point.

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. ....

b) Calculer $P(\mathrm{i})$. ....

Calcul 24.5 — Pour évaluer en un point – bis.

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 2$. ....

b) Calculer $P(\sqrt{2})$. ....

Calcul 24.6 — Pour évaluer en un point – ter.

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

En vous inspirant des deux exercices précédents, calculer :

a) $P(\sqrt{2} - 1)$. ....

b) $P(\mathrm{i} + 1)$. ....

Réponses mélangées

$R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1$ $\qquad Q = X^2 - 4X + 7$, $R = -3X - 8$ $\qquad R = 0$ $\qquad R = -108X - 110$

$R = -2nX + 2n - 1$ $\qquad Q = X^2 - 1$, $R = -X^2 + X + 1$ $\qquad R = -36X + 64$ $\qquad R = 2X - 3$ $\qquad 48 - 206\mathrm{i}$

$64 - 36\mathrm{i}$ $\qquad 116 - 92\sqrt{2}$ $\qquad R = -2X^3 - 3X^2 + 1$ $\qquad Q = 13X + \dfrac{25}{2}$, $R = \dfrac{1}{2}\left(29X^2 - 5X - 23\right)$ $\qquad -110 - 108\sqrt{2}$

$R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5$ $\qquad R = X^2 + X - 1$ $\qquad R = 1$ $\qquad Q = X^2 + 2X + 1$, $R = 2$

► Réponses et corrigés page 156

Fiche n° 24. Polynômes

Réponses

24.1 a) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 + 2X + 1 \\ R = 2 \end{array}}$

24.1 b) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 - 4X + 7 \\ R = -3X - 8 \end{array}}$

24.1 c) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = X^2 - 1 \\ R = -X^2 + X + 1 \end{array}}$

24.1 d) .... $\boxed{\begin{array}{l} Q = 13X + \dfrac{25}{2} \\ R = \dfrac{1}{2}\big(29X^2 - 5X - 23\big) \end{array}}$

24.2 a) .... $\boxed{R = 1}$

24.2 b) .... $\boxed{R = 0}$

24.2 c) .... $\boxed{R = -2nX + 2n - 1}$

24.2 d) .... $\boxed{R = X^2 + X - 1}$

24.3 a) .... $\boxed{R = 2X - 3}$

24.3 b) .... $\boxed{R = -2X^3 - 3X^2 + 1}$

24.3 c) .... $\boxed{R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5}$

24.3 d) .... $\boxed{R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1}$

24.4 a) .... $\boxed{R = -36X + 64}$

24.4 b) .... $\boxed{64 - 36\mathrm{i}}$

24.5 a) .... $\boxed{R = -108X - 110}$

24.5 b) .... $\boxed{-110 - 108\sqrt{2}}$

24.6 a) .... $\boxed{116 - 92\sqrt{2}}$

24.6 b) .... $\boxed{48 - 206\mathrm{i}}$

Corrigés

24.1 a)

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^3 & + & X^2 & - & X & + & 1 & X - 1 \\ \cline{8-8}
-(X^3 & - & X^2) & & & & & X^2 + 2X + 1 \\ \cline{1-3}
 & & 2X^2 & - & X & + & 1 & \\
 & & -(2X^2 & - & 2X) & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & X & + & 1 & \\
 & & & & -(X & - & 1) & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 2 &
\end{array}
$$

Ainsi, $Q = X^2 + 2X + 1$ et $R = 2$.

....

24.2 a) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$X^n = Q \times (X - 1) + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 1.$$

Ainsi, R est un polynôme constant. On évalue la relation précédente en 1. On obtient alors $1^n = Q(1) \times (1 - 1) + R(1)$. Donc, $R = 1$.

....

24.2 b) On constate que $X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n} = X^{3n} \times (X^2 + X + 1)$. Ainsi, $X^2 + X + 1 | X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$. Donc, $R = 0$.

....

24.2 c) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$(*) \quad (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2 = Q \times (X - 2)^2 + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 2.$$

Ainsi, R est de la forme $R = aX + b$. On évalue la relation $(*)$ en 2. On obtient alors

$$(2 - 3)^{2n} + (2 - 2)^n - 2 = Q(2) \times (2 - 2)^2 + R(2).$$

Donc, $-1 = 2a + b$. On dérive la relation $(*)$. On obtient alors

$$2n(X - 3)^{2n-1} + n(X - 2)^{n-1} = Q' \times (X - 2)^2 + Q \times 2(X - 2) + R'$$

On évalue cette dernière relation en 2. On obtient ainsi

$$2n(2-3)^{2n-1} + n(2-2)^{n-1} = Q'(2) \times (2-2)^2 + Q(2) \times 2(2-2) + R'(2).$$

Donc, $-2n = a$. On en déduit que $a = -2n$ puis que $b = -1 - 2a = 2n - 1$. Ainsi, $R = -2nX + 2n - 1$.

....

24.2 d) Notons Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Ainsi,

$$(*) \quad X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = Q \times (X^3 - 2X + 1) + R, \quad \text{où } deg(R) < deg(B) = 3.$$

Ainsi, R est de la forme $R = a(X^2 + bX + c)$. On constate que $X^3 - 2X + 1$ s'annule en 1. Ainsi, $X - 1$ divise $X^3 - 2X + 1$. Par division euclidienne, on obtient $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$. On constate également que $X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = X^n \times (X^2 + X - 1)$. Donc, $(*)$ devient $(X^2 + X - 1) \times (X^n - Q \times (X - 1)) = R$. Ainsi, $X^2 + X - 1 | R$. Or, $deg(R) \leqslant 2$. Donc, $R = a(X^2 + X - 1)$. On évalue $(*)$ en 1. On obtient $a = 1$. Donc, $R = X^2 + X - 1$.

....

24.3 a) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici, $P = A + B = X^5 + X^4 + 2X - 3 = X^4(X + 1) + 2X - 3$. Ainsi, $R = 2X - 3$.

....

24.3 b) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici, $P = A \times B = Q \times X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 1$. Ainsi, $R = -2X^3 - 3X^2 + 1$.

....

24.3 c) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici,

$$P = A \circ B = ((X-2)^2)^2 - 3(X-2)^2 + 1 = (X-2)^4 - 3(X-2)^2 + 1 = Q \times X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 20X + 5.$$

Ainsi, $R = -8X^3 + 21X^2 - 20X + 5$.

....

24.3 d) Trouver le reste de la division d'un polynôme par X^4 revient à trouver les coefficients constant, de degré 1, de degré 2 et de degré 3 du dividende. Ici,

$$P = A \circ B = 2(X^3 + X^2 - 2X + 1)^3 - 3(X^3 + X^2 - 2X + 1)^2 - (X^3 + X^2 - 2X + 1) + 1 = Q \times X^4 - 29X^3 + 11X^2 + 2X - 1.$$

Ainsi, $R = -29X^3 + 11X^2 + 2X - 1$.

....

24.4 a) On trouve $Q = X^4 - 2X^3 - 9X^2 - 20X - 44$ et $R = -36X + 64$.

....

24.4 b) On a $P = Q \times (X^2 + 1) + R$. On évalue en i. Ainsi, $P(\mathrm{i}) = Q(\mathrm{i}) \times (\mathrm{i}^2 + 1) + R(\mathrm{i})$. Donc $P(\mathrm{i}) = R(\mathrm{i}) = 64 - 36\mathrm{i}$.

....

24.5 a) On trouve $Q = X^4 - 2X^3 - 6X^2 - 26X - 65$ et $R = -108X - 110$.

....

24.5 b) On a $P = Q \times (X^2 - 2) + R$. On évalue en $\sqrt{2}$. Ainsi, $P(\sqrt{2}) = Q(\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}^2 - 2) + R(\sqrt{2})$. Donc, $P(\sqrt{2}) = R(\sqrt{2}) = -110 - 108\sqrt{2}$.

....

24.6 a) On commence par chercher un polynôme simple ayant $\sqrt{2} - 1$ pour racine. Posons $X = \sqrt{2} - 1$. Ainsi, $X^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$. Or, $\sqrt{2} = X + 1$. Donc, $X^2 = 3 - 2(X + 1) = -2X + 1$. Ainsi, $\sqrt{2} - 1$ est racine de $X^2 + 2X - 1$. On effectue ensuite la division euclidienne de P par $X^2 + 2X - 1$. On trouve $Q = X^4 - 4X^3 + X^2 - 28X + 4$ et $R = -92X + 24$. Donc, $P = Q \times (X^2 + 2X - 1) + R$. On évalue enfin en $\sqrt{2} - 1$. On obtient $P(\sqrt{2} - 1) = Q(\sqrt{2} - 1) \times ((\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) - 1) + R(\sqrt{2} - 1)$. Donc, $P(\sqrt{2} - 1) = R(\sqrt{2} - 1) = 116 - 92\sqrt{2}$.

....

24.6 b) On commence par chercher un polynôme simple ayant $1 + \mathrm{i}$ pour racine. Posons $X = 1 + \mathrm{i}$. Ainsi, $X^2 = 1 + 2\mathrm{i} + (\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$. Or, $\mathrm{i} = X - 1$. Donc, $X^2 = 2(X - 1)$. Ainsi, $\mathrm{i} + 1$ est racine de $X^2 - 2X + 2$. On effectue ensuite la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 2$. On trouve $Q = X^4 - 10X^2 - 42X - 117$ et $R = -206X + 254$. Donc, $P = Q \times (X^2 - 2X + 1) + R$. On évalue enfin en $\mathrm{i} + 1$. On obtient $P(\mathrm{i} + 1) = Q(\mathrm{i} + 1) \times ((\mathrm{i} + 1)^2 - 2(\mathrm{i} + 1) + 2) + R(\mathrm{i} + 1)$. Donc, $P(\mathrm{i} + 1) = R(\mathrm{i} + 1) = 48 - 206\mathrm{i}$.

....