

**Prérequis**

Forme algébrique et forme exponentielle.

**Pour s'échauffer**

**Calcul 16.1 — Écriture algébrique.**



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

- |                             |                      |                                  |                      |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $(2 + 6i)(5 + i)$ .....  | <input type="text"/> | e) $(2 - 3i)^4$ .....            | <input type="text"/> |
| b) $(3 - i)(4 + i)$ .....   | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{3 - i}$ .....       | <input type="text"/> |
| c) $(4 - 3i)^2$ .....       | <input type="text"/> | g) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$ ..... | <input type="text"/> |
| d) $(1 - 2i)(1 + 2i)$ ..... | <input type="text"/> | h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .....   | <input type="text"/> |

**Calcul 16.2 — Forme exponentielle.**



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

- |                      |                      |  |                      |
|----------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) 12 .....          | <input type="text"/> | e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ .....                   | <input type="text"/> |
| b) -8 .....          | <input type="text"/> | f) $5 - 5i$ .....                                  | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{3}i$ ..... | <input type="text"/> | g) $-5 + 5i\sqrt{3}$ .....                         | <input type="text"/> |
| d) $-2i$ .....       | <input type="text"/> | h) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ..... | <input type="text"/> |

**Un calcul plus dur**

**Calcul 16.3 — Une simplification.**



On pose  $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$ .

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) Calculer $ z $ .....                   | <input type="text"/> |
| b) Mettre $z$ sous forme algébrique ..... | <input type="text"/> |
| c) Calculer $z^{2021}$ .....              | <input type="text"/> |

**Réponses mélangées**

$13 - i$	$\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$	1	$4 + 32i$	$\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$	$2e^{i\frac{8\pi}{5}}$	$-119 + 120i$
5	$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$	$5e^{-\frac{\pi}{4}i}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$	12	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	
$8e^{i\pi}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$2e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$	$7 - 24i$	$10e^{-\frac{2\pi}{3}i}$	

► Réponses et corrigés page 129

# Fiche n° 16. Nombres complexes

## Réponses

16.1 a) ..... $\boxed{4 + 32i}$	16.1 g) ..... $\boxed{\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i}$	16.2 c) ..... $\boxed{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$	16.2 h) $\boxed{2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}}$
16.1 b) ..... $\boxed{13 - i}$	16.1 h) ..... $\boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$	16.2 d) ..... $\boxed{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$	16.3 a) ..... $\boxed{1}$
16.1 c) ..... $\boxed{7 - 24i}$	16.2 a) ..... $\boxed{12}$	16.2 e) ..... $\boxed{2e^{i\frac{8\pi}{5}}}$	16.3 b) ... $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$
16.1 d) ..... $\boxed{5}$	16.2 b) ..... $\boxed{8e^{i\pi}}$	16.2 f) ..... $\boxed{5e^{-\frac{\pi}{4}i}}$	16.3 c) .. $\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}$
16.1 e) .. $\boxed{-119 + 120i}$		16.2 g) ..... $\boxed{10e^{-\frac{2\pi}{3}i}}$	
16.1 f) ..... $\boxed{\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i}$			

## Corrigés

**16.1 a)** On développe :  $(2 + 6i)(5 + i) = 10 + 2i + 30i + 6i^2 = 10 + 32i - 6 = 4 + 32i$ .

**16.1 b)** On développe :  $(3 - i)(4 + i) = 12 + 3i - 4i - i^2 = 12 - i + 1 = 13 - i$ .

**16.1 c)** On développe :  $(4 - 3i)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times 3i + (3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

**16.1 d)** On développe :  $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 + 4 = 5$ .

Ou bien : en posant  $z = 1 - 2i$ , on reconnaît la quantité  $z\bar{z}$ , c'est-à-dire  $|z|^2$ . Ainsi,  $(1 - 2i)(1 + 2i) = 1^2 + 2^2 = 5$ .

**16.1 e)** On développe :

$$(2 - 3i)^4 = ((2 - 3i)^2)^2 = (4 - 2 \times 2 \times 3i - 9)^2 = (-5 - 12i)^2 = (5 + 12i)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 12i - 12^2 = -119 + 120i.$$

Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} 2^k (-3i)^{4-k} \\ &= (-3i)^4 + 4 \times 2 \times (-3i)^3 + 6 \times 2^2 \times (-3i)^2 + 4 \times 2^3 \times (-3i) + 2^4 \\ &= 81 + 216i - 216 - 96i + 16 = -119 + 120i. \end{aligned}$$

**16.1 f)** On utilise l'expression conjuguée :  $\frac{1}{3 - i} = \frac{3 + i}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{3^2 + 1^2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

**16.1 g)** On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$$\frac{2 - 3i}{5 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \frac{10 - 4i - 15i - 6}{5^2 + 2^2} = \frac{4 - 19i}{29}.$$

**16.1 h)** On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**16.2 a)** On a  $|12| = 12$  et  $\arg(12) = 0$ , donc la réponse est 12 (ou  $12e^{0i}$ ).

**16.2 b)** On a  $|-8| = 8$  et  $-1 = e^{i\pi}$ .

**16.2 c)** On a  $|\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$  et  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

.....  
**16.2 d)** On a  $|-2i| = 2$  et  $-i = \bar{i} = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ .

.....  
**16.2 e)** On écrit que  $-2 = 2e^{i\pi}$  et on utilise les propriétés de l'exponentielle :  
 $-2e^{i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\pi+i\frac{3\pi}{5}} = 2e^{i\frac{8\pi}{5}}$ .

.....  
**16.2 f)** On calcule  $|5 - 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$  et on écrit  
 $5 - 5i = 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ .

.....  
**16.2 g)** On calcule  $|-5 + 5i\sqrt{3}| = \sqrt{25 + 75} = 10$  puis on écrit

$$-5 + 5i\sqrt{3} = 10\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

.....  
**16.2 h)** On écrit que  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

Ainsi,  $|e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}| = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  (car  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$  et  $|e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ ). Et  $\arg(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}) = \arg(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{4}$ .

On en déduit que l'écriture exponentielle de  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$  est  $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

.....  
**16.3 a)** On remarque que le dénominateur de  $z$  est le conjugué du numérateur. Ainsi,  $|z| = 1$ .

.....  
**16.3 b)** De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1 + \sqrt{2} + i)^2}{(1 + \sqrt{2} - i)(1 + \sqrt{2} + i)} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2(1 + \sqrt{2})i - 1}{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2(1 + \sqrt{2})i}{4 + 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{2})(1 + i)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \end{aligned}$$

.....  
**16.3 c)** Enfin,  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$ , donc  $z^{2021} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = e^{\frac{2021}{4}i\pi}$ .

Comme  $2021 = 4 \times 505 + 1$ , on a  $e^{\frac{2021}{4}i\pi} = e^{505i\pi + \frac{\pi}{4}i} = e^{505i\pi}e^{\frac{\pi}{4}i} = -e^{i\frac{\pi}{4}}$ .