Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 20.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Calcul 20.2 — Valeurs de fonctions hyperboliques.

Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(0)$ ....

b) $\text{sh}(0)$ ....

c) $\text{ch}(\ln(2))$ ....

d) $\text{sh}(\ln(3))$ ....

e) $\text{ch}(\ln(2/3))$ ....

f) $\text{th}(\ln(2))$ ....

Calcul 20.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.

Soient x et y des réels.
Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x)$ ....

b) $\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 20.4 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 20.5 — Fonctions $x \longmapsto a^x$: plus difficile..

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 20.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ....

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ....

Calcul 20.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5}$ ....

b) $\mathrm{sh}(x) = 1$ ....

c) $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3}$ ....

d) $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4$ ....

e) $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3$ ....

f) $\mathrm{th}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

Dérivation

Calcul 20.8 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x + 1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ....

Calcul 20.9 — Quelques calculs de dérivées – bis.

Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $x \longmapsto \arcsin(x^2)$ .....

b) $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$ .....

c) $x \longmapsto \arctan(\operatorname{th}(x))$ ..

d) $x \longmapsto \operatorname{sh}(\operatorname{ch}(x))$ ......

Calcul 20.10 — Deux dérivées importantes.

a) $x \longmapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ ....

b) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

Calcul 20.11 — Dérivées plus compliquées.

Dériver les fonctions suivantes. La fonction F est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) $x \mapsto F(x^x)$ ....

b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))})$ ....

c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)$ ....

d) $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ....

Réponses mélangées

$x \mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5) + 3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}$ $\quad \dfrac{3}{5}$ $\quad \operatorname{ch}(x+y)$ $\quad \operatorname{sh}(x+y)$ $\quad \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$ $\quad \dfrac{5}{4}$ $\quad \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$ $\quad \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$

$\ln(1+\sqrt{2})$ $\quad \dfrac{4}{3}$ $\quad x \mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.$ $\quad \dfrac{\pi}{4}$ $\quad [-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]$

$x \mapsto \arctan(x)$ $\quad \dfrac{\pi}{6}$ $\quad \dfrac{\pi}{3}$ $\quad -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$ $\quad 1$ $\quad \left[\ln(3+\sqrt{10}), \right[$

$\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$ $\quad \dfrac{\pi}{6}$ $\quad 0$ $\quad 1$ $\quad x \mapsto 0$ $\quad \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad x \mapsto 0$

$x \mapsto \dfrac{1-\operatorname{th}^2(x)}{1+\operatorname{th}^2(x)}$ $\quad x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ $\quad x \mapsto (\ln(x)+1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln(2)$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$

$1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad x \mapsto \arcsin(x)$ $\quad 1$ $\quad x \mapsto \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$ $\quad x \mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))$

$\dfrac{13}{12}$ $\quad \left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad 0$ $\quad 1$ $\quad x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2}\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))}}$ $\quad 2$ $\quad \{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$

► Réponses et corrigés page 143

Fiche n° 20. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

20.1 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

20.1 b) .... $\boxed{2}$

20.1 c) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

20.1 d) .... $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

20.1 e) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

20.1 f) .... $\boxed{\frac{\pi}{3}}$

20.2 a) .... $\boxed{1}$

20.2 b) .... $\boxed{0}$

20.2 c) .... $\boxed{\frac{5}{4}}$

20.2 d) .... $\boxed{\frac{4}{3}}$

20.2 e) .... $\boxed{\frac{13}{12}}$

20.2 f) .... $\boxed{\frac{3}{5}}$

20.3 a) .... $\boxed{\mathrm{sh}(x+y)}$

20.3 b) .... $\boxed{\mathrm{ch}(x+y)}$

20.4 a) .... $\boxed{\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.4 b) .... $\boxed{1}$

20.4 c) .... $\boxed{-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

20.4 d) .... $\boxed{\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

20.5 a) .... $\boxed{\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

20.5 b) .... $\boxed{\left\{0;\frac{1}{2}\right\}}$

20.5 c) .... $\boxed{1-\frac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

20.5 d) .... $\boxed{\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

20.6 a) .... $\boxed{1}$

20.6 b) .... $\boxed{0}$

20.6 c) .... $\boxed{\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

20.6 d) . $\boxed{\begin{array}{c}\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

20.6 e) $\boxed{\begin{array}{c}\left\{\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\pi-\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

20.6 f) .... $\boxed{1}$

20.7 a) . $\boxed{\{\ln(\sqrt{5}-2);\ln(\sqrt{5}+2)\}}$

20.7 b) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

20.7 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$

20.7 d) . $\boxed{[-\ln(4+\sqrt{15}),\ln(4+\sqrt{15})]}$

20.7 e) .... $\boxed{\left[\ln(3+\sqrt{10}),\left[\right.\right.}$

20.7 f) .... $\boxed{\left]-\infty,\frac{1}{2}\ln(3)\right]}$

20.8 a) ... $\boxed{x\mapsto\ln(2)\times 2^x+2x}$

20.8 b) . $\boxed{x\mapsto\frac{15^x\ln(3/5)+3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

20.8 c) ..... $\boxed{x\mapsto(\ln(x)+1)x^x}$

20.8 d) . $\boxed{x\mapsto\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.}$

20.9 a) .... $\boxed{x\mapsto 2x\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$

20.9 b) ... $\boxed{x\mapsto\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}$

20.9 c) .... $\boxed{x\mapsto\frac{1-\mathrm{th}^2(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}}$

20.9 d) .... $\boxed{x\mapsto\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(x))}$

20.10 a) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

20.10 b) .... $\boxed{x\mapsto 0}$

20.11 a) $\boxed{x\mapsto(\ln(x)+1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}}$

20.11 b) . $\boxed{x\mapsto\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}}$

20.11 c) .... $\boxed{x\mapsto\arcsin(x)}$

20.11 d) .... $\boxed{x\mapsto\arctan(x)}$

Corrigés

20.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=2.$

....

20.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

....

20.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}.$

....

20.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}.$

20.2 c) On calcule : $\text{ch}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$.

20.2 d) On calcule : $\text{sh}(\ln(3)) = \dfrac{e^{\ln(3)} - e^{-\ln(3)}}{2} = \dfrac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$.

20.2 e) On calcule : $\text{ch}(\ln(2/3)) = \dfrac{e^{\ln(2/3)} + e^{-\ln(2/3)}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{\frac{13}{6}}{2} = \dfrac{13}{12}$.

20.2 f) On sait que $\text{th}(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5}$.

20.3 a) Développons :

$$\begin{aligned}
\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (e^y + e^{-y})(e^x - e^{-x})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \text{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

20.4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3) = 2x\ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

20.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2) = (x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

20.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(3) + 2x\ln(2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

20.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} &\Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10) = \ln(4) + x\ln(5) + \frac{x}{2}\ln(9) \\
&\Leftrightarrow x\left(2\ln(5) + 2\ln(2) - \ln(5) - \frac{2\ln(3)}{2}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2\ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.
\end{aligned}$$

20.5 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17} - 1}{2} \Leftrightarrow$ $x\ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17} - 1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

20.5 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

20.5 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

20.5 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

20.6 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de arcsin, l'unique solution est 1.

20.6 b) Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

20.6 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

20.6 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

20.6 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

20.6 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

20.7 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors on a les équivalences (comme $e^x > 0$)

$$\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X^2 + 1 = 2\sqrt{5}X \Leftrightarrow X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré, dont le discriminant est $20 - 4 = 16$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$. Ces deux quantités sont positives, on a donc l'équivalence $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow e^x = \sqrt{5} \pm 2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{5} \pm 2)$. Ainsi, les deux solutions sont $\{\ln(\sqrt{5} - 2); \ln(\sqrt{5} + 2)\}$

20.7 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{2} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0$, de discriminant $4 + 4 = 8$, de solutions $\dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. La seule solution positive est $1 + \sqrt{2}$, donc $\mathrm{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

20.7 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow X^2 - 1 = \dfrac{1}{3}(X^2 + 1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}X^2 - \dfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow X^2 = 2 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{2}$. Ainsi, la seule solution positive étant $\sqrt{2}$, $\mathrm{th}(x) \Leftrightarrow e^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

20.7 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{X + \frac{1}{X}}{2} \leqslant 4 \Leftrightarrow X^2 + 1 \leqslant 8X \Leftrightarrow X^2 - 8X + 1 \leqslant 0$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant 60 et pour racines $\dfrac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Les deux racines sont positives, donc $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15}e^x \leqslant 4 + \sqrt{15} \Leftrightarrow \ln(4 - \sqrt{15}) \leqslant x \leqslant \ln(4 + \sqrt{15})$. On remarque ensuite que $\dfrac{1}{4 - \sqrt{15}} = \dfrac{4 + \sqrt{15}}{(5 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15}$.

....

20.7 e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = e^x$. Alors $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \leqslant 6 \Leftrightarrow X - \dfrac{1}{X} \leqslant 6 \Leftrightarrow X^2 - 6X - 1 \leqslant 0$. Ce trinôme du second degré a pour discriminant 40, et a donc pour racines $\dfrac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$. La première racine est négative, la seconde positive, et $X \geqslant 0$, donc $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3 \Longleftrightarrow e^x \geqslant 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x \geqslant \ln(3 + \sqrt{10})$.

....

20.7 f) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $X = e^x$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \leqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \leqslant \frac{1}{2} \\
\Longleftrightarrow X^2 - 1 \leqslant \frac{X^2 + 1}{2} \Longleftrightarrow X^2 - 3 \leqslant 0 \\
\Longleftrightarrow X^2 \leqslant 3 \Longleftrightarrow e^{2x} \leqslant 3 \Longleftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

....

20.8 a) On n'oublie pas que $2^x = e^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

....

20.8 c) On écrit que $x^x = e^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$.

....

20.8 d) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - x^2}\arccos(x)^2}.$$

....

20.9 a) On dérive une composée $x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.

....

20.9 c) Il s'agit de dériver th :

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2.$$

La suite se dérive comme la dérivée d'une composée.

....

20.10 a) La fonction est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$.

....

20.10 b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1 + x^2} - \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$.

....

20.11 a) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de cette fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x F'(x^x) = (\ln(x) + 1)x^x \mathrm{e}^{-(x^x)^2} = (\ln(x) + 1)x^x \mathrm{e}^{-x^{2x}}$.

....

20.11 b) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$ est $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \mathrm{th}(x)$.

Donc, la dérivée de $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))})$ est

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}\mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{ch}(x))} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}$$

....