Fiche de calcul n° 12 011A

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 12.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 12.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

d) $x \longmapsto x\mathrm{ch}(x)$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{sh}(x)$ ....

b) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

c) $x \longmapsto (x\ln x)^2$ ....

d) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(x)}$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$ $\quad \dfrac{5}{2}\mathrm{ch}(2) - \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}(2) - \dfrac{3}{2}$ $\quad \ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}$

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x)) \end{cases}$ $\quad -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{4}{3}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}$ $\quad 4$ $\quad \dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \dfrac{8}{9}\sqrt{2} + \dfrac{4}{9}$ $\quad 1$ $\quad \begin{cases}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{2} - 1$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\ln x + \dfrac{2}{27}\right) \end{cases}$ $\quad \dfrac{5}{2} - \mathrm{e}^2$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}$

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) \end{cases}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1$ $\quad \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}$ $\quad 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$ $\quad \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$

▶ Réponses et corrigés page 111

Fiche n° 12. Intégration par parties

Réponses

12.1 a) $\boxed{\frac{\pi}{2}-1}$

12.1 b) $\boxed{\frac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\frac{1}{2}\mathrm{sh}(2)-\frac{3}{2}}$

12.1 c) $\boxed{4}$

12.1 d) $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}}$

12.1 e) $\boxed{1}$

12.1 f) $\boxed{2\ln 2-\frac{3}{4}}$

12.1 g) $\boxed{\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}}$

12.1 h) $\boxed{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}$

12.1 i) $\boxed{\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1}$

12.1 j) $\boxed{-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{4}{3}}$

12.1 k) $\boxed{\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\frac{8}{9}\sqrt{2}+\frac{4}{9}}$

12.1 l) $\boxed{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}}$

12.2 a) $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto(-x+2)\mathrm{e}^x\end{cases}}$

12.2 b) $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto-\dfrac{1+\ln x}{x}\end{cases}}$

12.2 c) $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{cases}}$

12.2 d) $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\mathrm{sh}(x)-\mathrm{ch}(x)\end{cases}}$

12.3 a) $\boxed{\frac{5}{2}-\mathrm{e}^2}$

12.3 b) $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}}$

12.4 a) $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x)+\sin(x)\mathrm{ch}(x))\end{cases}}$

12.4 b) $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x\ln^2 x-2x\ln x+2x\end{cases}}$

12.4 c) $\boxed{\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3\left(\frac{1}{3}\ln^2 x-\frac{2}{9}\ln x+\frac{2}{27}\right)\end{cases}}$

12.4 d) $\boxed{\begin{cases}]-1,1[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\end{cases}}$

Corrigés

12.1 a) On choisit $u'(t)=\cos t$ et $v(t)=t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t=[t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1.$

12.1 b) On choisit $u'(t)=\mathrm{sh}(2t)$ et $v(t)=2t+3$. $\displaystyle\int_0^1(2t+3)\mathrm{sh}(2t)\,\mathrm{d}t=\left[(2t+3)\frac{\mathrm{ch}(2t)}{2}\right]_0^1-\int_0^1\mathrm{ch}(2t)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\mathrm{ch}(2)-\frac{3}{2}-\frac{\mathrm{sh}(2)}{2}.$

12.1 c) On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$. $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2-2\int_0^2\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=4e-4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2=4.$

12.1 d) On choisit $v(t)=t$ et $u'(t)=2^t$. $\displaystyle\int_1^{\ln(2)}t2^t\,\mathrm{d}t=\int_1^{\ln(2)}t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=\left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)}\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t=2^{\ln(2)}-\frac{2}{\ln(2)}-\frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)}=\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2}.$

12.1 e) On choisit $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln t\,\mathrm{d}t=[t\ln t]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}1\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$

12.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

12.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

12.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t\arctan t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

12.1 i) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}t = [t\arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$.

12.1 j) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

12.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

12.1 l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\big(1+\tan^2 t\big)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

12.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

12.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

12.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

12.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{ch}t$, $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = [t\mathrm{sh}(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x) + 1$. D'où une primitive.

12.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t+3$ et $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle-\int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2 - \left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2$.

12.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t \,\mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t$. Finalement, $2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

12.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$. On commence par choisir $u' = \sin$ et $v = \mathrm{sh}$ cela donne $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)\mathrm{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u' = \cos$ et $v = \mathrm{ch}$, ce qui donne $-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + [\sin(t)\mathrm{ch}(t)]_0^x - \displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\cos(x)\mathrm{sh}(x) + \sin(x)\mathrm{ch}(x))$.

12.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t \,\mathrm{d}t = \left[t \ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2\ln t \,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $x\ln^2 x - 2[t\ln t]_1^x + 2\displaystyle\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

12.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2 \ln^2 t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2 \ln t \,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\dfrac{x^3}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\left[t^3 \ln t\right]_1^x + \dfrac{2}{9}\displaystyle\int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}(x^3 - 1)$. D'où une primitive.

12.4 d) La fonction est définie et continue sur $]-1,1[$. Si $x \in]-1,1[$, alors, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t$, ensuite, en posant $u'(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = \mathrm{e}^{\arccos(t)}$, on obtient $x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\arccos(x)} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t$. D'où $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\arccos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arccos(x)}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.
