Fiche de calcul n° 14

013A

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis

Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.
Petites décompositions en éléments simples.
Forme canonique d'un trinôme du second degré.
Changements de variable affines dans les intégrales.

Premier cas

Calcul 14.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Deuxième cas

Calcul 14.3

Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5}\,\mathrm{d}t$ ....

Troisième cas

Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître un expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 14.4

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Quatrième cas

Calcul 14.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.7

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.8

Soit $a \in \,]0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t$ ....

Cinquième cas

Calcul 14.9 — Une primitive à retenir.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculer la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ ....

b) Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2+x^2}$ ....

Calcul 14.10

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.11

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$ ....

Synthèse

Calcul 14.12 — Mise sous forme canonique.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 14.13

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 14.14

Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{4}{9}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Un calcul plus difficile

Calcul 14.15

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad \ln\dfrac{33}{28}$ $\quad \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$ $\quad \dfrac{\pi}{4}$ $\quad -\dfrac{1}{48}+\dfrac{51}{64}\ln\dfrac{21}{19}$ $\quad \dfrac{1}{3}\left(\ln(2)+\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$

$2\ln\dfrac{4}{3}$ $\quad \ln\left(\dfrac{a^2}{a^2-1}\right)$ $\quad \ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ $\quad \dfrac{\pi}{12}$ $\quad \ln\dfrac{1}{3}$ $\quad$ 1 et 2 $\quad \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}$ $\quad \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$ $\quad \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ $\quad 2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ $\quad \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad 2\ln\dfrac{9}{10}$ $\quad \sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}$

$\ln(2)$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$ $\quad a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}$ $\quad \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad \ln(a+1)$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ $\quad \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\dfrac{a}{a^2+x^2}$ $\quad \ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$ $\quad \dfrac{3}{2}+\ln(2)-\ln(3)$ $\quad A=-1$ et $B=1$ $\quad 2\ln\dfrac{4}{3}$ $\quad \dfrac{1}{2}$

► Réponses et corrigés page 117

Fiche n° 14. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

14.1 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

14.2 a) .... $\boxed{2\ln\frac{9}{10}}$

14.2 b) .... $\boxed{\ln(a+1)}$

14.3 a) .... $\boxed{\frac{3}{2}+\ln(2)-\ln(3)}$

14.3 b) .... $\boxed{-\frac{1}{48}+\frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}}$

14.4 a) .... $\boxed{\ln\left(\frac{7}{3}\right)}$

14.4 b) .... $\boxed{\ln\frac{33}{28}}$

14.5 a) .... $\boxed{\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$

14.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)}$

14.6 a) .... $\boxed{1 \text{ et } 2}$

14.6 b) ...... $\boxed{A=-1 \text{ et } B=1}$

14.6 c) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.7 a) .... $\boxed{\ln\frac{1}{3}}$

14.7 b) .... $\boxed{2\ln\frac{4}{3}}$

14.7 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}$

14.7 d) .... $\boxed{\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}}$

14.8 .... $\boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)}$

14.9 a) .... $\boxed{\frac{a}{a^2+x^2}}$

14.9 b) .... $\boxed{\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}$

14.10 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{4}}$

14.10 b) .... $\boxed{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$

14.11 .... $\boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

14.12 a) .... $\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

14.12 b) ...... $\boxed{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}}$

14.12 c) .. $\boxed{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\frac{15}{16}}$

14.12 d) ..... $\boxed{a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^3}{4}}$

14.13 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

14.13 b) .... $\boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.13 c) .... $\boxed{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.13 d) .... $\boxed{\ln(2)}$

14.14 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{12}}$

14.14 b) .... $\boxed{\ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)}$

14.15 .... $\boxed{\frac{1}{3}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$

Corrigés

14.1 a) La fonction $t \longmapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1,2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$. D'où le calcul :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(3)-\ln(2).$$

Enfin, on remarque que $\ln(3)-\ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

....

14.1 b) On procède comme précédemment mais on remarque qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(2t+1)$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).\end{aligned}$$

....

14.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{t+\frac{1}{2}},$$

en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\Big[\ln\Big(t+\tfrac{1}{2}\Big)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}}\\ &= 2\Big(\ln\frac{9}{16}-\ln\frac{5}{8}\Big) = 2\ln\frac{9\times 8}{5\times 16} = 2\ln\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Le résultat est < 0 puisque $9/10 < 1$.

C'est cohérent car on intègre une fonction $\geqslant 0$ entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

14.2 b) On calcule :

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+a)\Big]_0^{a^2} = \ln(a+a^2)-\ln(a) = \ln\big(a(a+1)\big)-\ln(a) = \ln(a+1).$$

14.3 a) On commence par faire la division euclidienne de l'expression t^2+t+1 et $t+1$. On trouve

$$t^2+t+1 = (t+1)t \;+\; 1.$$

Donc, on a (pour $t \in \mathbb{R}$ convenable) :

$$\frac{1+t+t^2}{1+t} = t + \frac{1}{1+t}$$

Donc,

$$\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} - \big(\ln(3)-\ln(2)\big) = \frac{3}{2}+\ln(2)-\ln(3).$$

Pour la seconde intégrale, on a utilisé un calcul fait précédemment.

14.3 b) D'abord, on fait une division euclidienne et on trouve

$$3t^2+2t+1 = (4t+5)\Big(\frac{3}{4}t-\frac{7}{16}\Big)+\frac{51}{16}.$$

Puis, après calcul, on trouve

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{3}{4}t-\frac{7}{16}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{96}-\frac{7}{96} = -\frac{1}{48} \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big(\ln(7)-\ln\frac{19}{3}\Big) = \frac{1}{4}\ln\frac{21}{19}.$$

Ainsi, l'intégrale cherchée vaut

$$-\frac{1}{48}+\frac{51}{64}\ln\frac{21}{19}.$$

14.4 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_1^2 = \ln(7)-\ln(3) = \ln\Big(\frac{7}{3}\Big).$$

14.4 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2+\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\Big(t^2+\frac{2}{3}\Big)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} &= \ln\frac{11}{12}-\ln\frac{7}{9}\\ &= \ln\Big(\frac{11\times 9}{12\times 7}\Big) = \ln\frac{33}{28}.\end{aligned}$$

14.5 a) On calcule :

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+\sqrt{2}t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(\ln(4)-\ln(1+\sqrt{2})\big)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\right) = \frac{1}{2}\ln\big(4(\sqrt{2}-1)\big)$$
$$= \ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

14.5 b) On force à apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. On calcule :

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{2at}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\Big[\ln(at^2+1)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1$$
$$= \frac{1}{2a}\big(\ln(a+1)-\ln(2)\big) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

14.6 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2} = A + \frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t=1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t=1$, on trouve $A=-1$. De même, on trouve $B=1$.

14.6 c) D'après ce qui précède, on a

$$\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\Big[\ln(t-2)-\ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\left[\ln\left(\frac{t-2}{t-1}\right)\right]_3^4$$
$$= 2\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right) = 2\left(\ln\frac{2}{3}+\ln(2)\right) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

14.7 a) Soit $t\in[0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \Big[\ln(2-t)-\ln(2+t)\Big]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{2-t}{2+t}\right)\right]_0^1 = \ln\frac{1}{3}.$$

14.7 b) Soit $t\in[2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 2\Big[\ln(t-1)-\ln(t)\Big]_2^3 = 2\left[\ln\left(\frac{t-1}{t}\right)\right]_2^3 = 2\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

14.7 c) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a $t^2+4t+3=(t+1)(t+3)$ et

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right).$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \ln(t+1) - \ln(t+3)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ \ln\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

14.7 d) Soit $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ \ln(\tfrac{1}{2}-t) - \ln(t+\tfrac{1}{2})\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\left[\ \ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{t+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

14.8 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{t^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}} - \frac{1}{t+\sqrt{a}}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big[\ln(\sqrt{a}-t) + \ln(t+\sqrt{a})\Big]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a}-t}{t+\sqrt{a}}\right)\right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right).$$

14.9 a) Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

14.9 b) D'après ce qui précède, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ répond à la question.

14.10 a) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

14.10 b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

14.11 On a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\big(\sqrt{2}\big) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\big(\sqrt{2}\big) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc, on a

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

....

14.12 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2 + (2\times\frac{1}{2}\times x) + 1 \\ &= x^2 + (2\times\frac{1}{2}\times x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

....

14.12 b) On procède comme précédemment mais on commencer par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\times x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{3}{4}\times x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \qquad \left(\text{car } \tfrac{1}{2}-\tfrac{9}{16} = -\tfrac{1}{16}\right) \end{aligned}$$

....

14.12 c) On trouve $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\big(x+\frac{1}{4}\big)^2 + \sqrt{2}\dfrac{15}{16}$.

....

14.12 d) On trouve

$$ax^2+a^2x+a^3 = a\big(x^2+ax\big) + a^3 = a\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right) + a^3 = a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}.$$

....

14.13 a) On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

....

14.13 b) Déjà, on a, si $t\in\mathbb{R}$: $t^2+t+1 = \big(t+\frac{1}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\big(t+\frac{1}{2}\big)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \left(\text{en posant } \theta = t+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\times\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

....

14.13 c) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\Big[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big]_0^{1/2} \qquad \text{(avec } a=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

....

14.13 d) Déjà, on a $6t^2-5t+1 = 6\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)$, pour $t\in\mathbb{R}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)} = 6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t &= \Big[\ln\big(\tfrac{1}{2}-t\big)-\ln\big(\tfrac{1}{3}-t\big)\Big]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3)-\ln(3/2) = \ln(2).\end{aligned}$$

....

14.14 a) On calcule

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t^2+\frac{2}{3}t\big)+\frac{10}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+\frac{10}{3}-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\arctan(1) = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

....

14.14 b) Déjà, on remarque qu'on a, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, $t^2-(2a+1)t+a^2+a = (t-a)\big(t-(a+1)\big)$ et

$$\frac{1}{(t-a)\big(t-(a+1)\big)} = \frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t-(a+1)} - \frac{1}{t-a}\right)\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln\big(a+1-t\big) - \ln\big(a-t\big)\Big]_0^1 = \left[\ln\left(\frac{a+1-t}{a-t}\right)\right]_0^1 \\ &= \left(\ln\left(\frac{a}{a-1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)\right) = \ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right).\end{aligned}$$

....

14.15 Déjà, si $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{1-t+t^2}\right).$$

Ensuite, on calcule : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

Et, on écrit : $\dfrac{2-t}{1-t+t^2} = \dfrac{-\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}}{1-t+t^2}$.

Et, on remarque que

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1-t+t^2)\Big]_0^1 = \ln(1)-\ln(1) = 0.$$

Or, on a vu plus haut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Donc, on trouve

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\ln(2) + \frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

....