Fiche de calcul n° 31

Groupes symétriques

Prérequis

Permutations, cycles, transpositions, décomposition en produit de cycles à supports disjoints, signature.

Opérations sur les permutations

Calcul 31.1 — Échauffement.

On considère les permutations suivantes de $\mathfrak{S}_6$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les permutations suivantes.

a) ρ^{-1} ....

b) σ^{-1} ....

c) σ^2 ....

d) $\rho\sigma$ ....

e) $\sigma\rho$ ....

f) $\sigma\rho\sigma^{-1}$ ....

Calcul 31.2 — Opérations sur les cycles.

Calculer les puissances suivantes, où a, b et c désignent trois entiers naturels non nuls distincts.

a) $(a\ b)^{-1}$ ....

b) $(a\ b\ c)^{-1}$ ....

c) $(1\ 3\ 5\ 2\ 7)^{-1}$ ....

d) $(a\ b\ c)^2$ ....

e) $(2\ 4\ 5\ 1)^3$. ....

f) $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42}$. ....

Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Calcul 31.3 — Décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ ....

c) $(1\ 3\ 5\ 2)(2\ 4\ 1\ 7)(5\ 8)$ ....

d) $(1\ 3)(3\ 2\ 1\ 4)(3\ 1\ 4)(2\ 1\ 4)$ ....

e) $(2\ 6)(4\ 2\ 1\ 5)(3\ 2)(3\ 1\ 5)$ ....

Calcul 31.4 — Application aux calculs de puissance.

Expliciter les puissances suivantes sous la forme d'un produit de cycles à supports disjoints.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{47}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{168}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}^{168}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{227}$ ....

Calculs de signature

Calcul 31.5 — Calculs de signature – niveau 1.

Déterminer la signature des permutations suivantes.

a) $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ ....

b) $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ ....

c) $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)^{-1}$ ....

d) $(1\ 3\ 2\ 4)^{37}$ ....

e) $(1\ 3)(2\ 6\ 7)^{-1}(4\ 7\ 3\ 1\ 2)$ ....

f) $((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2))^{64}$ ....

Calcul 31.6 — Calculs de signature – niveau 2.

Déterminer la signature des permutations suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 9 & 10 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 1 & 6 & 10 & 5 & 9 & 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ ....

Réponses mélangées

1 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (a\ c\ b)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad (7\ 2\ 5\ 3\ 1)$ $\quad \mathrm{id}$

$(1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (1\ 4\ 2)(5\ 6)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$(1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)$ $\quad (a\ b)$ $\quad (1\ 2\ 7\ 5\ 3)$ $\quad (1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)$ $\quad (2\ 1\ 5\ 4)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$(1\ 2\ 6\ 5\ 3)$ $\quad 1$ $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad -1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad 1$

$(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)$ $\quad -1$ $\quad (1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8)$ $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad (1\ 2)(3\ 4)$ $\quad (c\ b\ a)$ $\quad 1$

► Réponses et corrigés page 178

Fiche n° 31. Groupes symétriques

Réponses

31.1 a) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}}$

31.1 b) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&1&3&4\end{pmatrix}}$

31.1 c) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&2&5&1\end{pmatrix}}$

31.1 d) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}}$

31.1 e) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&2&3\end{pmatrix}}$

31.1 f) .. $\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}}$

31.2 a) .... $\boxed{(a\ b)}$

31.2 b) .... $\boxed{(c\ b\ a)}$

31.2 c) .... $\boxed{(7\ 2\ 5\ 3\ 1)}$

31.2 d) .... $\boxed{(a\ c\ b)}$

31.2 e) .... $\boxed{(2\ 1\ 5\ 4)}$

31.2 f) .... $\boxed{(1\ 2\ 7\ 5\ 3)}$

31.3 a) $\boxed{(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)}$

31.3 b) .. $\boxed{(1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9)}$

31.3 c) .... $\boxed{(1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8)}$

31.3 d) .... $\boxed{(1\ 2)(3\ 4)}$

31.3 e) .... $\boxed{(1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)}$

31.4 a) .... $\boxed{(1\ 4\ 2)(5\ 6)}$

31.4 b) .... $\boxed{\mathrm{id}}$

31.4 c) .... $\boxed{(1\ 2\ 6\ 5\ 3)}$

31.4 d) .... $\boxed{(1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)}$

31.5 a) .... $\boxed{-1}$

31.5 b) .... $\boxed{1}$

31.5 c) .... $\boxed{1}$

31.5 d) .... $\boxed{-1}$

31.5 e) .... $\boxed{-1}$

31.5 f) .... $\boxed{1}$

31.6 a) .... $\boxed{-1}$

31.6 b) .... $\boxed{1}$

31.6 c) .... $\boxed{1}$

31.6 d) .... $\boxed{1}$

Corrigés

31.1 a) Pour déterminer la permutation ρ^{-1}, il suffit de lire de bas en haut la matrice représentant la permutation ρ. Ainsi, la quatrième colonne donne $\rho^{-1}(1) = 4$, la première $\rho^{-1}(2) = 1$, *etc.* Au total $\rho^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}$.

....

31.1 b) On procède comme pour ρ^{-1} pour obtenir $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&6&5&1&3&4\end{pmatrix}$.

....

31.1 c) Par définition, $\sigma(1) = 4$ et $\sigma(4) = 6$, ainsi $\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \sigma(4) = 6$. On procède de même pour les autres images et au total $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&2&5&1\end{pmatrix}$.

....

31.1 d) Par définition, $\sigma(1) = 4$ et $\rho(4) = 1$, ainsi $\rho\sigma(1) = \rho(\sigma(1)) = \rho(4) = 1$. On procède de même pour les autres images et au total $\rho\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}$.

....

31.1 e) On procède comme pour $\rho\sigma$ pour obtenir $\sigma\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&2&3\end{pmatrix}$. Notons que $\rho\sigma \neq \sigma\rho$, ce qui n'est en rien surprenant.

....

31.1 f) D'après b), $\sigma^{-1}(1) = 2$ et, d'après e), $\sigma\rho(2) = 6$, ainsi $\sigma\rho\sigma^{-1}(1) = 6$. On procède de même pour les autres images et au total $\sigma\rho\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}$.

....

31.2 a) Les transpositions sont des involutions et ainsi leur propre inverse.

....

31.2 b) Pour inverser un cycle, il suffit de le parcourir dans l'autre sens. Ainsi $(a\ b\ c)^{-1} = (c\ b\ a)$.

....

31.2 c) On procède comme à la question précédente.

....

31.2 d) Notons $\sigma = (a\ b\ c)$. On a $\sigma(a) = b$ et $\sigma(b) = c$, d'où $\sigma^2(a) = c$. On obtient de même $\sigma^2(c) = b$ et $\sigma^2(b) = a$. Au total, $(a\ b\ c)^2 = (a\ c\ b)$.

Remarquons que $(a\ b\ c)^2 = (a\ b\ c)^{-1}$, ce qui était prévisible dans la mesure où le 3-cycle $(a\ b\ c)$ vérifie $(a\ b\ c)^3 = \mathrm{id}$.

....

31.2 e) Notons $\sigma = (2\ 4\ 5\ 1)$. On a $\sigma(2) = 4$, $\sigma(4) = 5$ et $\sigma(5) = 1$, ains $\sigma^3(2) = 1$. On obtient de la même façon $\sigma^3(1) = 5$, $\sigma^3(5) = 4$ et $\sigma^3(4) = 2$. Au total, $(2\ 4\ 5\ 1)^3 = (2\ 1\ 5\ 4)$.

On pourrait aussi remarquer que σ est un 4-cycle, ainsi $\sigma^3 = \sigma^{-1}$ et on a donc

$$(2\ 4\ 5\ 1)^3 = (2\ 4\ 5\ 1)^{-1} = (1\ 5\ 4\ 2) = (2\ 1\ 5\ 4).$$

....

31.2 f) Puisque $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)$ est un 5-cycle, on a $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42} = (1\ 5\ 2\ 3\ 7)^r$, avec r le reste de la division euclidienne de 42 par 5, à savoir 2. Ainsi $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)^{42} = (1\ 5\ 2\ 3\ 7)^2 = (1\ 2\ 7\ 5\ 3)$.

....

31.3 a) Notons σ la permutation considérée et partons de l'élément 1. On a $\sigma(1) = 7$, $\sigma(7) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, d'où un premier cycle $(1\ 7\ 4)$. On procède de même à partir d'un élément de $\{1, \ldots, 10\} \setminus \{1, 4, 7\}$, par exemple 2, pour lequel on a $\sigma(2) = 6$, $\sigma(6) = 8$, $\sigma(8) = 10$ et $\sigma(10) = 2$, d'où un second cycle $(2\ 6\ 8\ 10)$. On continue à partir d'un élément de $\{1, \ldots, 10\} \setminus \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$, par exemple 3, pour lequel on a $\sigma(3) = 9$, $\sigma(9) = 5$ et $\sigma(5) = 3$, d'où un troisième cycle $(3\ 9\ 5)$. La réunion des supports de ces trois cycles étant $\{1, \ldots, 10\}$, la décomposition est terminée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5).$$

Rappelons que

$$(1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5) = (1\ 7\ 4)(3\ 9\ 5)(2\ 6\ 8\ 10) = (2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)(1\ 7\ 4) = \textit{etc.}$$

Bref, les cycles à supports disjoints commutent entre eux.

....

31.3 b) Notons σ la permutation considérée et procédons comme à la question précédente. On a $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 10$, $\sigma(10) = 6$, $\sigma(6) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, d'où un premier cycle $(1\ 3\ 10\ 6\ 4)$. Ensuite $\sigma(2) = 2$ et le cycle (2) est donc omis. On a enfin $\sigma(5) = 7$ et $\sigma(7) = 5$, d'où la transposition $(5\ 7)$, et $\sigma(8) = 9$ et $\sigma(9) = 8$, d'où la transposition $(8\ 9)$. En résumé

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9).$$

....

31.3 c) Notons $\rho = (1\,3\,5\,2)$, $\sigma = (2\,4\,1\,7)$ et $\tau = (5\,8)$. On a $\rho\sigma\tau(1) = \rho\sigma(1) = \rho(7) = 7$ et $\rho\sigma\tau(7) = \rho\sigma(7) = \rho(2) = 1$, d'où une première transposition $(1\ 7)$. Par ailleurs, $\rho\sigma\tau(2) = \rho\sigma(2) = \rho(4) = 4$ et on obtient de même $\rho\sigma\tau(4) = 3$, $\rho\sigma\tau(3) = 5$, $\rho\sigma\tau(5) = 8$ et $\rho\sigma\tau(8) = 2$, d'où le cycle $(2\ 4\ 3\ 5\ 8)$. Enfin $\rho\sigma\tau(6) = 6$ et le cycle (6) est donc omis. En résumé

$$(1\ 3\ 5\ 2)(2\ 4\ 1\ 7)(5\ 8) = (1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8).$$

....

31.3 d) On procède comme à la question c.

....

31.3 e) On procède comme à la question c.

....

31.4 a) Commençons par décomposer la permutation en un produit de cycle à supports disjoints :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)(5\ 6).$$

Ainsi $\sigma^{47} = (1\ 2\ 4)^{47}(5\ 6)^{47} = (1\ 2\ 4)^2(5\ 6)^1 = (1\ 4\ 2)(5\ 6)$, dans la mesure où les permutations $(1\ 2\ 4)$ et $(5\ 6)$ commutent et sont respectivement un 3-cycle et un 2-cycle ($47 \equiv 2\,[3]$ et $47 \equiv 1\,[2]$).

....

31.4 b) On procède comme à la question précédente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{168} = (1\ 6\ 5)^{168}(2\ 7)^{168}(3\ 4)^{168} = \mathrm{id} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

31.4 c) On procède toujours de la même façon :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}^{168} = (1\ 6\ 3\ 2\ 5)^{168} = (1\ 6\ 3\ 2\ 5)^{3} = (1\ 2\ 6\ 5\ 3).$$

31.4 d) On procède toujours de la même façon :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{227} = (1\ 4\ 7\ 6)^{227}(2\ 3\ 5)^{227} = (1\ 4\ 7\ 6)^{3}(2\ 3\ 5)^{2} = (1\ 6\ 7\ 4)(2\ 5\ 3)$$

31.5 a) Puisque la signature est un morphisme de groupe, $\varepsilon((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)) = \varepsilon((1\ 2))\varepsilon((3\ 4))\varepsilon((5\ 6)) = (-1)^3 = -1$.

31.5 b) Rappelons que la signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$. Ainsi la signature du 5-cycle $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ est $(-1)^4 = 1$.

31.5 c) Puisque la signature est un morphisme de groupe à valeurs dans $\{\pm 1\}$, une permutation et son inverse ont même signature, ainsi $\varepsilon\big((1\ 5\ 3\ 2\ 4)^{-1}\big) = \varepsilon((1\ 5\ 3\ 2\ 4)) = 1$, d'après la question précédente.

31.5 d) On a $\varepsilon((1\ 3\ 2\ 4)) = (-1)^{4-1} = -1$, ainsi $\varepsilon\big((1\ 3\ 2\ 4)^{37}\big) = \varepsilon((1\ 3\ 2\ 4))^{37} = (-1)^{37} = -1$.

31.5 e) On a $\varepsilon\big((1\ 3)(2\ 6\ 7)^{-1}(4\ 7\ 3\ 1\ 2)\big) = \varepsilon((1\ 3))\varepsilon((2\ 6\ 7))\varepsilon((4\ 7\ 3\ 1\ 2)) = -1 \times (-1)^{3-1} \times (-1)^{5-1} = -1$.

31.5 f) On a $\varepsilon\big(((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2))^{64}\big) = (\varepsilon((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2)))^{64} = 1$, puisque l'exposant 64 est pair.

31.6 a) On commence par décomposer la permutation en un produit de cycles à supports disjoints.

$$\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5)) = (-1)^{3-1}(-1)^{4-1}(-1)^{3-1} = -1.$$

31.6 b) De la même façon,

$$\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 3\ 10\ 6\ 4)(5\ 7)(8\ 9)) = (-1)^{5-1}(-1)(-1) = 1.$$

31.6 c) $\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 9 & 10 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 3\ 7\ 10\ 5\ 8\ 2\ 4)(6\ 9)) = (-1)^{8-1}(-1) = 1.$

31.6 d) $\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 1 & 6 & 10 & 5 & 9 & 2 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon((1\ 7\ 2)(4\ 10)(3\ 6\ 9\ 8)) = (-1)^{3-1}(-1)(-1)^{4-1} = 1.$