Fonctions de deux variables

Prérequis
Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

Les fondamentaux

Calcul 33.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x,y) \longmapsto \arcsin|x-y|$ ....

b) $(x,y) \longmapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ ....

c) $(x,y) \longmapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}$ ....

d) $(x,y) \longmapsto \sqrt{16-x^2-y^2}\ln\left(x^2+y^2-16\right)$ ....

Calcul 33.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$ ....

b) $f : (x,y) \longmapsto \sin(2xy - y)$ ....

c) $f : (x,y) \longmapsto (x^2y, x^2 - y^2)$ ....

d) $f : (x,y) \longmapsto \arctan(2x+y)$ ....

Calcul 33.3

Même exercice.

a) $f : (x,y) \longmapsto \cos(x-y)$ ....

b) $f : (x,y) \longmapsto x\cos(\mathrm{e}^{xy})$ ....

c) $f : (x,y) \longmapsto x^y$ ....

d) $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ....

Composition de fonctions

Calcul 33.4 — Règle de la chaîne.

On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$ ....

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ ....

c) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3\sin(2t) \\ v(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$ ....

Calcul 33.5 — Changements de variables.

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$ ....

b) $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ....

Réponses mélangées

$]0,+\infty[\times[0,+\infty[$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\cos(2xy - y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x-1)\cos(2xy-y)$

$\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right) + \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$ $\qquad$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-1\leqslant y\leqslant x+1\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2xy, 2x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2, -2y)$ $\qquad$ $\sin(2t)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5y^4 + x$

$\varnothing$ $\qquad$ $\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{2\mathrm{e}^{4t} + \mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{-2t}}}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x-y)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{1+(2x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{1+(2x+y)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(\mathrm{e}^{xy}) - xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y\ln x$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right) - \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}$ $\qquad$ $-72\cos(4t) - 46\sin(4t)$

► Réponses et corrigés page 183

Fiche n° 33. Fonctions de deux variables

Réponses

33.1 a) $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x-1\leqslant y\leqslant x+1\}}$

33.1 b) $\boxed{]0,+\infty[\times[0,+\infty[}$

33.1 c) $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}}$

33.1 d) $\boxed{\varnothing}$

33.2 a) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5y^4+x}$

33.2 b) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y\cos(2xy-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2x-1)\cos(2xy-y)}$

33.2 c) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2xy,2x) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x^2,-2y)}$

33.2 d) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}}$

33.3 a) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin(x-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x-y)}$

33.3 b) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(\mathrm{e}^{xy})-xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}}$

33.3 c) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,x^{y-1} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x}$

33.3 d) $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

33.4 a) $\boxed{\sin(2t)}$

33.4 b) $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}}}$

33.4 c) $\boxed{-72\cos(4t)-46\sin(4t)}$

33.5 a) $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)-\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

33.5 a) $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)+\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

33.5 b) $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

33.5 b) $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

Corrigés

33.2 b) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_y' : t \mapsto 2y\cos(2ty - y)$. On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 2y\cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

....

33.3 d) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0,0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \dfrac{ty^2}{t^2+y^2}$. Sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{y^2\cdot(t^2+y^2) - ty^2\cdot 2t}{(t^2+y^2)^2}$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ en évaluent en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0,0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{\frac{x\cdot 0^2}{x^2+0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$

....

33.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))\dfrac{\partial v}{\partial t}(t) = 8\sin t\cos t + 6\cos t(-\sin t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$.

....

33.5 a) La règle de la chaîne donne $\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$, avec les notations $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u,v) = \dfrac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.

....