Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ……

b) $a^5 - a^6$ ……

c) a^{12} ……

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ……

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ……

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ……

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ……

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ……

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ……

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ ……

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ……

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ……

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ ……

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ……

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ ……

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ ……

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} a^k$ ……

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{4} (2 - a^k)$ ……

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.

Soient x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ....

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 5.6 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ ....

b) $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$ ....

c) $x^3 + y^3 + z^3$ ....

d) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ....

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ ....

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ ....

Calcul 5.7

Même exercice.

a) $x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y)$ ....

b) $x^4 + y^4 + z^4$ ....

c) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ ....

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ ....

e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$ ....

Réponses mélangées

$-a^2+1$ $\quad -4+43\mathrm{i}\sqrt{5}$ $\quad 8-6\mathrm{i}$ $\quad ac$ $\quad a^2-2b$ $\quad 8+6\mathrm{i}$ $\quad a^3+3a$ $\quad a^2-a-1$

$-9-46\mathrm{i}$ $\quad 39-18\mathrm{i}$ $\quad a$ $\quad a^2+2$ $\quad 1$ $\quad 0$ $\quad 31$ $\quad a^3-3ab+3c$ $\quad 0$

$a^4-4a^2b+4ac+2b^2$ $\quad 18-26\mathrm{i}$ $\quad 1$ $\quad -1$ $\quad 7a^2+12a+7$ $\quad a^2b-ac-2b^2$ $\quad 1$

$ab-c$ $\quad 2197$ $\quad ab-3c$ $\quad 3$ $\quad 4a^2-a-3$ $\quad a^4+4a^2+2$ $\quad 1$ $\quad -2ac+b^2$

► Réponses et corrigés page 91

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) $\boxed{7a^2+12a+7}$

5.1 b) $\boxed{a^2-a-1}$

5.1 c) $\boxed{4a^2-a-3}$

5.1 d) $\boxed{-a^2+1}$

5.2 a) $\boxed{8+6\mathrm{i}}$

5.2 b) $\boxed{8-6\mathrm{i}}$

5.2 c) $\boxed{18-26\mathrm{i}}$

5.2 d) $\boxed{-9-46\mathrm{i}}$

5.3 a) $\boxed{39-18\mathrm{i}}$

5.3 b) $\boxed{2197}$

5.3 c) $\boxed{-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) $\boxed{1}$

5.4 a) $\boxed{3}$

5.4 b) $\boxed{1}$

5.4 c) $\boxed{1}$

5.4 d) $\boxed{0}$

5.4 e) $\boxed{-1}$

5.4 f) $\boxed{31}$

5.5 a) $\boxed{a^2+2}$

5.5 b) $\boxed{a^3+3a}$

5.5 c) $\boxed{a^4+4a^2+2}$

5.6 a) $\boxed{a^2-2b}$

5.6 b) $\boxed{ab-3c}$

5.6 c) $\boxed{a^3-3ab+3c}$

5.6 d) $\boxed{ab-c}$

5.6 e) $\boxed{ac}$

5.6 f) $\boxed{-2ac+b^2}$

5.7 a) $\boxed{a^2b-ac-2b^2}$

5.7 b) $\boxed{a^4-4a^2b+4ac+2b^2}$

5.7 c) $\boxed{0}$

5.7 d) $\boxed{1}$

5.7 e) $\boxed{a}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3+6a^2+12a+8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2-1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2-1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2-a) = a^5-a^4$ et donc $a^5-a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2-1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4-2a^2+1 = -a^2-a$ puis $a^{12} = (-a^2-a)^2 = a^4+2a^3+a^2$.

5.1 d) L'égalité a^3-a^2+1 peut s'écrire $a(a-a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a-a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1-a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9+6(-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})^2 = 9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24-18\mathrm{i}-8\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3-3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1+3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2-(2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24-30\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2-(3\mathrm{i})^2 = 4+9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4+\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3+3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5})-3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2+(\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64+48\mathrm{i}\sqrt{5}+60-5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8}+3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8}+3\cdot\dfrac{3}{8}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4-1 = 3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.4 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\dfrac{a^5 - 1}{a - 1}$.

5.4 e) Cette somme géométrique vaut $\dfrac{a^{99} - 1}{a - 1} \times a^1 = \dfrac{a^{100} - a}{a - 1} = \dfrac{1 - a}{a - 1} = -1$.

5.4 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2 - a^1)(2 - a^4)(2 - a^2)(2 - a^3) = (5 - 2(a + a^4))(5 - 2(a^2 + a^3)) = 25 - 10(a + a^2 + a^3 + a^4) + 4(a + a^4)(a^2 + a^3).$$

Or $a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ et $(a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^6 + a^4 + a^7 = a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ aussi.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2 + 2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2 + 2)^2 - 2$.

5.6 a) On développe $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ puis on conclut par soustraction.

5.6 b) On reconnaît $x(xy + zx) + y(yz + xy) + z(zx + yz) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$.

5.6 c) Le développement $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\left[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)\right] + 6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab - 3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

5.6 d) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a - z)(a - x)(a - y) = a^3 - (x + y + z)a^2 + (xy + yz + zx)a - xyz$.

5.6 e) En factorisant, on reconnaît $(x + y + z)xyz$.

5.6 f) On se ramène à $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$.

5.7 a) On cherche $x^2(xy+zx)+y^2(yz+xy)+z^2(zx+yz)$, c'est-à-dire $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)-x^2yz-y^2zx-z^2xy$.

5.7 b) *Première solution* : on développe $(x+y+z)^4$ puis on conclut par soustraction à l'aide des calculs précédents.

Deuxième solution : on remarque qu'il s'agit de calculer $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, donc qu'il suffit de développer $(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)$.

5.7 c) On réduit au même dénominateur $(x - y)(y - z)(z - x)$ puis on développe le numérateur.

5.7 d) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on factorise le numérateur par $(z-y)$:

$$\begin{aligned} x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x) &= x^2(z-y)+(y^2-z^2)x-yz(y-z) \\ &= (z-y)\big[x^2-(y+z)x+yz\big], \end{aligned}$$

et l'on reconnaît pour le dernier facteur : $x^2-(y+z)x+yz=(x-y)x-(x-y)z=(x-y)(x-z)$.

....

5.7 e) On procède de même :

$$\begin{aligned} x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x) &= x^3(z-y)+(y^3-z^3)x-yz(y^2-z^2) \\ &= (z-y)\big[x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)\big] \\ &= (z-y)\big[(x^2-y^2)x-yz(x-y)-z^2(x-y)\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x+y)x-yz-z^2\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x^2-z^2)+(x-z)y\big] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z)[(x+z)+y], \end{aligned}$$

d'où $x+y+z=a$ après simplification par le dénominateur.

....