Fiche de calcul n° 7

Exponentielle et Logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0,125$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\dfrac{1}{12}$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ .....

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\dfrac{16}{25}$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ ....

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$..........................

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ ....

c) Simplifier $\gamma = \ln\Big((2+\sqrt{3})^{20}\Big) + \ln\Big((2-\sqrt{3})^{20}\Big)$ ....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. ....

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 2}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$ ....

e) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 2}$ ....

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ ....

b) $\mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4})-\ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln\mathrm{e}^2)}\right)$ ....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$ ....

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$ ....

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. ....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ ....

b) $\mathrm{e}^{x - \frac{1}{2} f(x)}$ ....

c) $\frac{1}{2} f(x^2 - 2x)$ ....

d) $x f'(x) - 1$ ....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ ....

Réponses mélangées

1 $2\ln 5 - 2\ln 2$ $\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$ $-2\ln 2 - 2\ln 5$ -17 $-3\ln 2$ 8

$\ln 3 + 11\ln 2$ 1 -1 $\mathbb{R}$ impaire $3\ln 5 + 2\ln 2$ $x + \ln 2$ $3\ln 2$

impaire $\frac{-13-\sqrt{273}}{2}$ $4\ln 2$ $2\ln 2 + 2\ln 3$ 0 $-\frac{1}{2}$ -1 impaire

$\frac{1}{\ln 2}$ ok $\frac{1}{2}\ln 2$ -2 0 $x \in [0,1]$ $17 + 12\sqrt{2}$ $x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}$ $-\frac{1}{1+x}$

$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}$ $x \geqslant \frac{2}{e}$ impaire $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{9}$ $\varnothing$ $\frac{3}{2}$ $\ln|x-1|$ $\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$

$-2\ln 5 + 4\ln 2$ $\frac{1}{3}$ $2\ln 3 - 2\ln 2$ $-\ln 3 - 2\ln 2$ $x \geqslant -\frac{1}{12}$ $9\ln 2$ e

► Réponses et corrigés page 96

Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) $\boxed{4\ln 2}$

7.1 b) $\boxed{9\ln 2}$

7.1 c) $\boxed{-3\ln 2}$

7.1 d) $\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$

7.1 e) $\boxed{3\ln 2}$

7.1 f) $\boxed{2\ln 2+2\ln 3}$

7.2 a) $\boxed{-\ln 3-2\ln 2}$

7.2 b) $\boxed{2\ln 3-2\ln 2}$

7.2 c) $\boxed{\ln 3+11\ln 2}$

7.2 d) $\boxed{3\ln 5+2\ln 2}$

7.2 e) $\boxed{-2\ln 5+4\ln 2}$

7.2 f) $\boxed{2\ln 5-2\ln 2}$

7.3 $\boxed{-2\ln 2-2\ln 5}$

7.4 a) $\boxed{\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)}$

7.4 b) $\boxed{17+12\sqrt{2}}$

7.4 c) $\boxed{0}$

7.4 d) $\boxed{0}$

7.5 a) $\boxed{8}$

7.5 b) $\boxed{\frac{1}{2}}$

7.5 c) $\boxed{\frac{1}{3}}$

7.5 d) $\boxed{\frac{1}{9}}$

7.5 e) $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7.5 f) $\boxed{\frac{3}{2}}$

7.6 a) $\boxed{-2}$

7.6 b) $\boxed{\frac{1}{\ln 2}}$

7.6 c) $\boxed{-17}$

7.6 d) $\boxed{1}$

7.6 e) $\boxed{-1}$

7.6 f) $\boxed{e}$

7.7 a) $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 b) $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 c) $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 d) $\boxed{\text{impaire}}$

7.8 a) $\boxed{\mathbb{R}}$

7.8 b) $\boxed{\text{ok}}$

7.8 c) $\boxed{1}$

7.8 d) $\boxed{\text{-1}}$

7.9 a) $\boxed{x+\ln 2}$

7.9 b) $\boxed{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.9 c) $\boxed{\ln|x-1|}$

7.9 d) $\boxed{-\frac{1}{1+x}}$

7.9 e) $\boxed{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}}$

7.10 a) $\boxed{x\geqslant\frac{\ln 12+5}{3}}$

7.10 b) $\boxed{x\in[0,1]}$

7.10 c) $\boxed{x\geqslant\frac{2}{e}}$

7.10 d) $\boxed{x\geqslant-\frac{1}{12}}$

7.10 e) $\boxed{\varnothing}$

7.10 f) $\boxed{\frac{-13-\sqrt{273}}{2}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16=4^2=2^4$ donc $\ln 16=4\ln 2$.

7.1 c) On a $0{,}125=\frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125=-\ln 8=-3\ln 2$.

7.1 e) On a $72=8\times 9=2^3\times 3^2$ donc $\ln 72-2\ln 3=(3\ln 2+2\ln 3)-2\ln 3=3\ln 2$.

7.2 c) On a $0,875=\frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21+2\ln 14-3\ln(0{,}875)&=(\ln 3+\ln 7)+2(\ln 2+\ln 7)-3(\ln 7-\ln 8)\\&=\ln 3+2\ln 3+3\times 3\ln 2=3\ln 3+11\ln 2.\end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

....

7.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16} \ln((1+\sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1+\sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8} \ln \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4 \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$.

....

7.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20} \Big) = \ln\big(\big((4-3)^{20}\big)\big) = 0$

....

7.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

....

7.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2} \ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2)) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

....

7.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

....

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

....

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big( ]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin]-\infty, -7[$.

....