Fiche de calcul n° 28

0027A

Équations différentielles

Prérequis
Équations différentielles.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 28.1

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y \quad \text{et} \quad y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1 \quad \text{et} \quad y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12 \quad \text{et} \quad y(0) = 3$ ....

Calcul 28.2

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y \quad \text{et} \quad y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2 \quad \text{et} \quad y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6 \quad \text{et} \quad y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e} \quad \text{et} \quad y(\pi) = 12$ ....

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 28.3 — Une équation avec conditions initiales.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ....

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3\mathrm{i}$ ....

Calcul 28.4 — Racines doubles, Racines simples.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ ....

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$ ....

Calcul 28.5 — Racines complexes.

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ ....

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ....

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ et $y(0) = \mathrm{i}$ et $y'(0) = -\mathrm{i}$ ....

Réponses mélangées

$x \mapsto \frac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$ $\quad x \mapsto \frac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$ $\quad x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$

$x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$

$x \mapsto (2-3\mathrm{i})\mathrm{e}^{x} + (3\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{2x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ $\quad x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$

$x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{2-2x}$ $\quad x \mapsto \cos x + 2\sin x$ $\quad x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}$

$x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$ $\quad x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ $\quad x \mapsto \left(12 + \frac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \frac{2\mathrm{e}}{\pi}$

► Réponses et corrigés page 170

Fiche n° 28. Équations différentielles

Réponses

28.1 a) .... $\boxed{x \mapsto 56e^{12x}}$

28.1 b) .... $\boxed{x \mapsto 6e^{x} - 1}$

28.1 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}}$

28.1 d) .... $\boxed{x \mapsto 9e^{2x} - 6}$

28.2 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{(6-x)/5}}$

28.2 b) .... $\boxed{x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}}$

28.2 c) .... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

28.2 d) .... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}}$

28.3 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{2x}}$

28.3 b) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

28.3 c) .... $\boxed{x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}}$

28.3 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-3i)e^{x} + (3i-1)e^{2x}}$

28.4 a) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}}$

28.4 b) .... $\boxed{x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}}$

28.4 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}}$

28.4 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)e^{x}}$

28.4 e) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)e^{2-2x}}$

28.5 a) .... $\boxed{x \mapsto \cos x + 2\sin x}$

28.5 b) .... $\boxed{x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)}$

28.5 c) .... $\boxed{x \mapsto e^{-x}\sin(x)}$

28.5 d) .... $\boxed{x \mapsto e^{x}\left(\dfrac{-1+i}{2}e^{2ix} + \dfrac{1+i}{2}e^{-2ix}\right)}$

Corrigés

28.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56e^{12x}$.

....

28.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6e^{x} - 1$.

....

28.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}$.

....

28.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9e^{2x} - 6$.

....

28.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = e = \lambda e^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto e^{(6-x)/5}$.

....

28.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

....

28.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

....

28.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\dfrac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \dfrac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

....

28.3 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

....

28.3 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

....

28.3 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$.

....

28.3 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2+1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3i$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 3i - 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - 3i)e^{x} + (3i - 1)e^{2x}$.

....

28.4 a) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

....

28.4 b) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2-1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

....

28.4 c) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2+r-2=0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda+\mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda+\mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \dfrac{4}{3}e^x - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

....

28.4 d) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x$.

Alors, $y(0) = \lambda = 2$ et $y'(0) = \lambda + \mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^x$.

....

28.4 e) Soit y_0 la solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont la racine double est -2. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x}$.

Alors, $y(1) = (\lambda + \mu)e^{-2} = 1$ et $y'(1) = (-2\lambda + \mu - 2\mu)e^{-2} = -3$. Le système s'écrit $\lambda + \mu = e^2$ et $2\lambda + \mu = 3e^2$. Il se réduit en $\lambda + \mu = e^2$ et $\lambda = 2e^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^{2-2x}$.

....

28.5 a) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = 2 = \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos x + 2 \sin x$.

....

28.5 b) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda \cos \dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin \dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = -1 = -\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos \dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin \dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

....

28.5 c) Soit y_0 l'unique solution du problème de Cauchy. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 2 = 0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1 - i$ et $-1 + i$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x}(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))$.

Alors, $y_0(0) = 0 = \lambda$ et $y_0'(0) = 1 = -\lambda + \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x} \sin(x)$.

....

28.5 d) L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -4 et ses racines sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto e^x\left(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}\right),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^x\left(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}\right)$.

Alors, $y_0(0) = i = \lambda + \mu$ et $y_0'(0) = -i = (\lambda + \mu) + (2i\lambda - 2i\mu)$. Le système réduit s'écrit $\lambda + \mu = i$ et $4i\lambda = 2 - 2i$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^x\left(\dfrac{-1 + i}{2}e^{2ix} + \dfrac{1 + i}{2}e^{-2ix}\right)$.

En utilisant les formules d'Euler, cette solution peut également s'écrire $y_0 : x \mapsto ie^x(\cos(2x) - \sin(2x))$.

....