Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du le discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Calcul 6.4 — **Racine évidente.**

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

a) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ....

b) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ ....

c) $(x+a)(x+b)=(m+a)(m+b)$ ....

d) $(b-c)x^2+(c-a)mx+(a-b)m^2=0$ ....

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{b}{m}$ ....

f) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — **À la recherche de l'équation.**

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 ....

b) -11 et 17 ....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ ....

d) $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ ....

e) $m+3$ et $\dfrac{2m-5}{2}$ ....

f) $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$ ....

Calcul 6.6 — **Avec le discriminant.**

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ ....

b) $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$ ....

c) $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

Réponses mélangées

$2, 3$ $\quad$ $a = 1/2$ et $b = 8$ $\quad$ $-2/7$ $\quad$ $a-b, a+b$ $\quad$ $]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$

$2x^2 - (4m+1)x + (2m^2+m-15) = 0$ $\quad$ m donc ab/m $\quad$ $m = -3/4$ et $x = 3/4$

$m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$ $\quad$ 1 donc -5 $\quad$ 0, donc 5 $\quad$ a, b $\quad$ $2/3$

$a = -2$ et $b = 1$ $\quad$ $x^2 - 2mx + 3 = 0$ $\quad$ $x^2 - 6x - 187 = 0$ $\quad$ $x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad$ $-1/m$

$a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$ $\quad$ $6, 7$ $\quad$ -1 donc $-19/5$ $\quad$ $m^2x^2 + (m-2m^2)x + (m^2-m-2) = 0$

$a = 2$ et $b = 3$ $\quad$ $a = -3$ et $b = 5$ $\quad$ 1 donc $(a-b)/(b-c)$ $\quad$ 1 donc $8/3$

$[-3, 5]$ $\quad$ $]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $\quad$ $3, 3$ $\quad$ $2, -6$ $\quad$ m donc $-(m+a+b)$

$-3, -5$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $2m/(m+3)$ $\quad$ 0, donc $-3/2$ $\quad$ 1 donc $c(a-b)/(a(b-c))$

$x^2 - 22x + 117 = 0$ $\quad$ m donc $m(a-b)/(b-c)$ $\quad$ $]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $\quad$ $-1/3, -1/3$

$a+b$ puis $2ab/(a+b)$. $\quad$ $m = 1$ et $x = -1$ ou $m = -1$ et $x = 1$ $\quad$ $-3, 11$ $\quad$ $-7, -11$

▶ Réponses et corrigés page 94

Fiche nº 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3,3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3,-1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2,-6}$

6.1 d) .... $\boxed{2,3}$

6.1 e) .... $\boxed{0,\text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0,\text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.1 i) .... $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

6.1 j) .... $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

6.2 a) .... $\boxed{6,7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3,-5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7,-11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3,11}$

6.2 e) .... $\boxed{a,b}$

6.2 f) .... $\boxed{a-b,a+b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

6.4 a) .... $\boxed{1 \text{ donc } (a-b)/(b-c)}$

6.4 b) .... $\boxed{1 \text{ donc } c(a-b)/(a(b-c))}$

6.4 c) .... $\boxed{m \text{ donc } -(m+a+b)}$

6.4 d) .... $\boxed{m \text{ donc } m(a-b)/(b-c)}$

6.4 e) .... $\boxed{m \text{ donc } ab/m}$

6.4 f) .... $\boxed{a+b \text{ puis } 2ab/(a+b).}$

6.5 a) .... $\boxed{x^2-22x+117=0}$

6.5 b) .... $\boxed{x^2-6x-187=0}$

6.5 c) .... $\boxed{x^2-4x+1=0}$

6.5 d) .... $\boxed{x^2-2mx+3=0}$

6.5 e) .... $\boxed{2x^2-(4m+1)x+(2m^2+m-15)=0}$

6.5 f) .... $\boxed{m^2x^2+(m-2m^2)x+(m^2-m-2)=0}$

6.6 a) .... $\boxed{m=-3/4 \text{ et } x=3/4}$

6.6 b) .... $\boxed{m=-1 \text{ et } x=-2, \text{ ou } m=7 \text{ et } x=2/3}$

6.6 c) .... $\boxed{m=1 \text{ et } x=-1 \text{ ou } m=-1 \text{ et } x=1}$

6.7 a) .... $\boxed{a=2 \text{ et } b=3}$

6.7 b) .... $\boxed{a=-2 \text{ et } b=1}$

6.7 c) .... $\boxed{a=-3 \text{ et } b=5}$

6.7 d) .... $\boxed{a=1/2 \text{ et } b=8}$

6.7 e) .... $\boxed{a=1 \text{ et } b=3\sqrt{7}}$

6.8 a) .... $\boxed{]-\infty,1]\cup[\sqrt{2},+\infty[}$

6.8 b) .... $\boxed{[-3,5]}$

6.8 c) .... $\boxed{]-\infty,-1]\cup[2/3,+\infty[}$

6.8 d) .... $\boxed{]-\infty,-1/2[\cup[4,+\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2-6x+9=(x-3)^2$.

....

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

....

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

....

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2+3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

....

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

....

6.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'éqation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

....

6.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b) = ab(2x-(a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

....

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

....

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2-1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

....