# Développements limités

**Prérequis**
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young !

**Avertissement :** Les développements limités peuvent se donner au « sens faible » (avec les petits $o(\cdot)$) ou « au sens fort » (avec les grands $O(\cdot)$). Volontairement, aucune de ces deux formes n'est imposée. Mais, pour des raisons de concision, une seule d'entre elles est donnée dans les éléments de correction de chaque question.

## Développements limités

**Calcul 22.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.**

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle $x$ définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4 : $f(x) = \sin(x) + 2\ln(1+x)$ ..................

b) À l'ordre 4 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ..................

c) À l'ordre 6 : $\sin(x)(\cosh(x) - 1)$ ..................

d) À l'ordre 6 : $\mathrm{e}^x \sin(x)$ ..................

**Calcul 22.2 — Développements limités d'une fonction composée.**

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle $x$ définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4, en 0 : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ..................

b) À l'ordre 6, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ..................

c) À l'ordre 3, en 0 : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$ ..................

d) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ..................

**Calcul 22.3 — Développements limités d'une fonction composée.**

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle $x$ définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en $\dfrac{\pi}{3}$ : $\sin(\pi\cos(x))$ ..................

b) À l'ordre 3, en $\dfrac{\pi}{4}$ : $\tan(x)$ ..................

c) À l'ordre 7, en $\dfrac{\pi}{2}$ : $\cos(\pi\sin(x))$ ..................

# Développements asymptotiques

### Calcul 22.4

Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle $x$ définie par l'expression suivante :

a) À la précision $x^2$, en 0 : $\dfrac{1}{x(e^x-1)} - \dfrac{1}{x^2}$ ........................

b) À la précision $\dfrac{1}{x^5}$, en $+\infty$ : $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ ...........................

c) À la précision $\dfrac{1}{x^3}$, en $+\infty$ : $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x)$ .........

d) À la précision $\dfrac{e^x}{x^2}$, $+\infty$ : $\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^{x^2}$ ............................

**Réponses mélangées**

$$\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{24}+\underset{x\to 0}{o}(x^6) \qquad 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{O}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)$$

$$-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{1}{720}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2) \qquad -1+\frac{\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{\pi^2}{48}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right)$$

$$3x-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \qquad -\ln(x)+1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{6x^4}-\frac{5}{6x^5}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^6}\right) \qquad x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}+\underset{x\to 0}{o}(x^6)$$

$$1-\frac{3\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right) \qquad x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$e-\frac{ex}{2}+\frac{11ex^2}{24}-\frac{7ex^3}{16}+\frac{2447ex^4}{5760}+\underset{x\to 0}{O}(x^5)$$

$$1-x+\frac{3}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right) \qquad e\left(1+ix-x^2-\frac{5}{6}ix^3\right)+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$e^{-\frac{1}{2}}\left(e^x+\frac{e^x}{3x}-\frac{7e^x}{36x^2}\right)+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \qquad 1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4-\frac{19}{5760}x^6+\underset{x\to 0}{O}(x^7)$$

▶ Réponses et corrigés page 150

# Fiche n° 22. Développements limités

## Réponses

**22.1** a) ........ $\boxed{3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)}$

**22.1** b) ........ $\boxed{x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)}$

**22.1** c) ........ $\boxed{\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)}$

**22.1** d) ........ $\boxed{x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} - \dfrac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)}$

**22.2** a) ........ $\boxed{\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \dfrac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \dfrac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)}$

**22.2** b) ........ $\boxed{1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 - \dfrac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)}$

**22.2** c) ........ $\boxed{\mathrm{e}\left(1 + \mathrm{i}x - x^2 - \dfrac{5}{6}\mathrm{i}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)}$

**22.2** d) ........ $\boxed{1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)}$

**22.3** a) ........ $\boxed{1 - \dfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)}$

**22.3** b) ........ $\boxed{1 + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4\right)}$

**22.3** c) ........ $\boxed{-1 + \dfrac{\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^4 - \dfrac{\pi^2}{48}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^6 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^7\right)}$

**22.4** a) ........ $\boxed{-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{720}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)}$

**22.4** b) ........ $\boxed{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{5}{6x^4} - \dfrac{5}{6x^5} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)}$

**22.4** c) ........ $\boxed{-\ln(x) + 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}$

**22.4** d) ........ $\boxed{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{3x} - \dfrac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right) + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)}$

## Corrigés

**22.1** a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4) = 3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$.

**22.1** b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 4. Observez que le développement limité à l'odre 3 de $\dfrac{1}{x+1}$ suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).$$

---

**22.1** c) Il suffit d'écrire : $\sin(x)(\cosh(x) - 1) = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^5}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)$.

---

**22.1** d) Il suffit d'écrire :

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^6).$$

---

**22.2** a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 5) et de l'exponentielle (à l'ordre 4), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)\right) = \mathrm{e}\exp\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)\right)$.

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{24}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^4\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$.

Observez qu'il n'est pas utile de faire apparaître tous les termes de la partie régulière du développement limité de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ selon la puissance à laquelle on la considère.

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \dfrac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \dfrac{2447\mathrm{e}x^4}{5760} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$.

---

**22.2** b) On a

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)\\ \sqrt{u} &= 1 + \frac{1}{2}(u-1) - \frac{1}{8}(u-1)^2 + \frac{1}{16}(u-1)^3 + \underset{u\to 1}{\mathrm{O}}((u-1)^4)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^7).\end{aligned}$$

---

**22.2** c) On a : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 + \mathrm{i}x - \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{i}\dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e}\dfrac{(x-1)^2}{2} + \mathrm{e}\dfrac{(x-1)^3}{6} + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^3\big)$.

D'où : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e} + \mathrm{e}\left(\mathrm{i}x - \dfrac{x^2}{2} - \mathrm{i}\dfrac{x^3}{6}\right) + \mathrm{e}\dfrac{\left(\mathrm{i}x - \dfrac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \mathrm{e}\dfrac{(\mathrm{i}x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = \mathrm{e}\left(1 + \mathrm{i}x - x^2 - \dfrac{5}{6}\mathrm{i}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

---

**22.2** d) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application $g$ définie par $g(t) = f(1+t) = \dfrac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$. Or $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $\dfrac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$. D'où $g(t) = \left(-t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right) = -t + \dfrac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$.

---

**22.3** a) La formule de Taylor-Young affirme que $\cos(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ (observez que l'ordre 1 sera suffisant !) et

$\sin(t) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2\right)$. D'où $\sin(\pi\cos(x)) = 1 - \dfrac{3\pi^2}{8}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$

---

**22.3 b)** On sait que $\tan(t) = t + \dfrac{t^3}{3} + \underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)$. Ainsi,

$$\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan(t)}{1-\tan(t)} = \frac{1+t+\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)}{1-t-\dfrac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)} = \left(1+t+\frac{t^3}{3}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)\left(1+t+t^2+\frac{4}{3}t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)\right)$$
$$= 1+2t+2t^2+\frac{8}{3}t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4).$$

D'où finalement $\tan(x) = 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{O}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)$.

.................................................................................................................................................

**22.3 c)** La formule de Taylor-Young affirme que $\sin(x) = 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\right)$ (observez que l'ordre 5 sera suffisant !) et $\cos(t) = -1+\frac{1}{2}(t-\pi)^2+\underset{t\to\pi}{\mathrm{o}}\left((t-\pi)^3\right)$ (observez que l'ordre 3 sera suffisant !).

D'où :

$$\cos(\pi\sin(x)) = -1+\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right)^2+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right)$$
$$= -1+\frac{\pi^2}{8}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{\pi^2}{48}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6+\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\mathrm{o}}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^7\right).$$

.................................................................................................................................................

**22.4 a)** On a :

$$\frac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)}-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)}-\frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}+\dfrac{x^4}{120}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)}-1\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120}+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)\right)$$
$$= -\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{1}{720}x^2+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2).$$

.................................................................................................................................................

**22.4 b)** Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}$, en $+\infty$ à l'ordre 5, revient à le faire, en 0 à l'ordre 5, pour l'application $g$ définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \dfrac{t\sin(t)}{1+t}$. Or $t\sin(t) = t^2-\dfrac{t^4}{6}+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^6)$ et $\dfrac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^4)$. D'où $g(t) = t^2-t^3+\frac{5}{6}t^4-\frac{5}{6}t^5+\underset{t\to0}{\mathrm{O}}(t^6)$, puis $f(x) = \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{6x^4}-\dfrac{5}{6x^5}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{x^6}\right)$.

.................................................................................................................................................

**22.4 c)** On a : $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x) = -\ln(x)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)+1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{4x^3}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

.................................................................................................................................................

**22.4 d)** On a :

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \exp\left(x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)$$
$$= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x^2}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^x}{3x}-\frac{7\mathrm{e}^x}{36x^2}\right)+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)$$

.................................................................................................................................................