

Déterminants

Prérequis

Nombres complexes.

Calculs en dimension deux

Calcul 32.1



Soit a un nombre réel.

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} i & 3 \\ -2i & 5i \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

Calcul 32.2



Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3/2 & 7/2 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 85 & 72 \\ 53 & 91 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(8) \\ -2 & \ln(e^3) \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 - \sqrt{32} \\ 2 + \sqrt{8} & 3 - \sqrt{8} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/7 \\ 5/9 & 7/8 \end{pmatrix}$

Calculs en dimension trois

Calcul 32.3



Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

On rappelle que le nombre complexe j vérifie $j^3 = 1$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -j & j \\ j & -j^2 & 1 \\ -j^2 & 1 & j^2 \end{pmatrix}$

Calcul 32.4



Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} j & -j & j \\ -j & j & j \\ j & j & -j \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2+i & -2+i \\ -i & 2i-1 & 1-2i \\ -1 & i & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

Calcul 32.5



Soit x, y et z des nombres réels et a un nombre réel strictement positif.

Calculer le déterminant de chacune des matrices d'ordre trois suivantes.

a) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^2) & -2\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) & -2\ln(a) & \ln(a^2) \\ -\ln(a^2) & \ln(a) & 2\ln(\sqrt{a}) \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$

Réponses mélangées

| | | | | | | |
|----|-------------------|---------------|--------------------|----------------|-------|-----|
| 6 | $9 \ln(2)$ | $-6 \ln^3(a)$ | $-2a^2$ | $227/336$ | -4 | -2 |
| 20 | $(y-x)(z-y)(z-x)$ | $6i-12$ | 0 | $7\sqrt{2}+13$ | 3 | 919 |
| 0 | -40 | 0 | $x^3+y^3+z^3-3xyz$ | $-5+6i$ | 4/375 | |

► Réponses et corrigés page 181

Fiche n° 32. Déterminants

Réponses

| | | | | | |
|---------------|------------|---------------|------------------|---------------|--------------------------|
| 32.1 a) | $-2a^2$ | 32.2 c)..... | $227/336$ | 32.4 b) | $6i - 12$ |
| 32.1 b) | 6 | 32.2 d) | $3\,919$ | 32.4 c)..... | $4/375$ |
| 32.1 c) | $-5 + 6i$ | 32.2 e) | $7\sqrt{2} + 13$ | 32.5 a).... | $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ |
| 32.1 d) | 20 | 32.3 a) | 0 | 32.5 b) | $-6 \ln^3(a)$ |
| 32.2 a) | -2 | 32.3 b) | -40 | 32.5 c)... | $(y-x)(z-y)(z-x)$ |
| 32.2 b) | $9 \ln(2)$ | 32.3 c) | 0 | 32.5 d) | 0 |
| | | 32.4 a) | -4 | | |

Corrigés

32.1 a) Le déterminant vaut $-a^2 - a^2 = -2a^2$.

32.1 b) Le déterminant vaut $-(-2) \times 3 = 6$.

32.1 c) Le déterminant vaut $i \times 5i - (-2) \times 3 = -5 + 6i$.

32.1 d) La matrice est triangulaire inférieure donc son déterminant vaut $-4 \times (-5) = 20$.

32.2 a) Le déterminant vaut $\frac{1}{4} \times (3 \times 9 - 5 \times 7) = \frac{1}{4} \times (27 - 35) = -2$.

32.2 b) Le déterminant vaut $\ln(2) \times 3 \times \ln(e) - (-2) \times 3 \times \ln(2) = 9 \ln(2)$.

32.2 c) Le déterminant vaut $\frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right) - \frac{5}{9} \times \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{227}{336}$.

32.2 d) Le déterminant vaut $3\,919$.

32.2 e) Le déterminant vaut $(\sqrt{2} + 1)(3 - \sqrt{8}) - (2 + \sqrt{8})(1 - \sqrt{32}) = 7\sqrt{2} + 13$.

32.3 a) Le déterminant vaut 0 .

32.3 b) Deux permutations de colonnes, $C_2 \leftrightarrow C_1$ puis $C_3 \leftrightarrow C_2$, ramènent ce déterminant à celui d'une matrice triangulaire supérieure. Son déterminant vaut $-2 \times 5 \times 4 = -40$.

32.3 c) On remarque que la deuxième colonne C_2 vaut $-j \times C_1$. Ainsi, le déterminant est nul.

32.4 a) Le déterminant vaut -4 .

32.4 b) Le déterminant vaut $6i - 12$.

32.4 c) Le déterminant vaut $\frac{4}{375}$.

32.5 a) On reconnaît une matrice circulante. Son déterminant vaut $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

.....

32.5 b) Le déterminant vaut $-6 \ln^3(a)$.

.....

32.5 c) Le déterminant de cette matrice de Vandermonde vaut $(y - x)(z - y)(z - x)$.

.....

32.5 d) Les opérations sur les colonnes $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ramènent au calcul du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ x + 1 & 1 & 2 \\ x + 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, lui-même nul.

.....