

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 9.5 — Avec des quotients.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7



Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15 & \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)} & (2x^2 - 2x + 10) \exp(2x) & \\
 8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4 & 6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x)) & \frac{1}{1-x^2} & \\
 -2 \frac{(x^2+1) \sin(2x+1) + x \cos(2x+1)}{(x^2+1)^2} & 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & & \\
 \frac{(2x+3)(2 \sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2 \cos(x)}{(2 \sin(x)+3)^2} & \frac{1}{x \ln(x)} & (-2x^2 + 3x - 1) \exp(x^2 + x) & \\
 \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} & \frac{x^2}{(x+1)^2} & \frac{2}{x(1-\ln(x))^2} & \frac{6x}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right) & \frac{2x}{x^2+1} \\
 \frac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2} & \frac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2} & 5(x^2-5x)^4(2x-5) & \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} & \\
 \frac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} & 6x^2+2x-11 & \frac{2}{x+1} \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) & & \\
 \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2} & (6x-1)\ln(x-2) + \frac{3x^2-x}{x-2} & -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x)) & & \\
 \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) & \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2) & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 101

Fiche n° 9. Dérivation

Réponses

9.1 a) $6x^2 + 2x - 11$

9.1 b) $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

9.1 c) $(2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$

9.1 d) $(6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$

9.2 a) $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$

9.2 b) $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

9.2 c) $8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4$

9.2 d) $-3(3 \cos(x) - \sin(x))^2(3 \sin(x) + \cos(x))$

9.3 a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$

9.3 b) $\frac{1}{x \ln(x)}$

9.3 c) $(-2x^2 + 3x - 1) \exp(x^2 + x)$

9.3 d) $6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x))$

9.4 a) $\frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

9.4 b) $\frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2} \sin\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

9.4 c) $\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

9.4 d) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

9.5 a) $\frac{(2x + 3)(2 \sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2 \cos(x)}{(2 \sin(x) + 3)^2}$

9.5 b) $\frac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}$

9.5 c) $-2 \frac{(x^2 + 1) \sin(2x + 1) + x \cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

9.5 d) $\frac{(4x + 3) \ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

9.6 a) $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

9.6 b) $\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$

9.6 c) $\frac{1}{1 - x^2}$

9.6 d) $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$

9.7 a) $\frac{10x - 5}{(3 - x)^2(2 + x)^2}$

9.7 b) $\frac{2}{x + 1} \left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$

9.7 c) $\frac{2x^2 + 2x + 5}{(x + 2)(x - 1)^2}$

9.7 d) $\frac{x^2}{(x + 1)^2}$

9.7 e) $\frac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$

Corrigés

9.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x + 3)(2x - 5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

9.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2 + 3)(x^2 - 5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

9.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x - 2) \exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2 \exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$.

9.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x - 1) \ln(x - 2) + (3x^2 - x) \times \frac{1}{x - 2} = (6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$.

9.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.

9.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

9.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x)) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

9.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$.

En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

9.3 a) On calcule : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

9.3 b) On calcule : $f'(x) = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$.

9.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

9.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

9.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \times \frac{4x(x^2 + 1) - (2x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \frac{4x^3 + 4x - 4x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

9.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right) \times \frac{2(x^2 + 4) - (2x + 1) \times 2x}{(x^2 + 4)^2} = -\sin\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right) \times \frac{2x^2 + 8 - 4x^2 - 2x}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2} \sin\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right). \end{aligned}$$

9.4 c) On calcule : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

9.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

9.5 a) On calcule : $f'(x) = \frac{(2x + 3)(2\sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x) + 3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2 \cos(x) + 4x \sin(x) - 6x \cos(x) + 6 \sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x) + 3)^2}.$$

9.5 b) On calcule : $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x + 2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x + 2)^2} = \frac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x + 2)^2} = \frac{3x + 2 - 6x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}$

9.5 c) On calcule : $f'(x) = \frac{-2\sin(2x + 1) \times (x^2 + 1) - \cos(2x + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = -2 \frac{(x^2 + 1)\sin(2x + 1) + x \cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

9.5 d) On calcule : $f'(x) = \frac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

9.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

9.6 b) On calcule : $f'(x) = \frac{\sqrt{9-x^2} - x \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{9-x^2+x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

9.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$. Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u-x}} \times u'(x) \times \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1) - (x+1) \times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2 \times \frac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

9.6 d) On calcule : $f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} \times \frac{x}{\sin(x)} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$.

9.7 a) On calcule : $f'(x) = \frac{-(-1)}{(3-x)^2} + \frac{-1}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \frac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

9.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} = \frac{2x(x+1) - 1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2 + 2x - 1$, on calcule $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \frac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \frac{2}{x+1} \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

9.7 c) On calcule : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+x+2} + \frac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2 + 2x + 5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans \mathbb{R} .

On a : $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x-1)^2}$.

9.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2 \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

9.7 e) On calcule : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln(x)) - (1 + \ln(x))\frac{-1}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{\frac{2}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$.