Décomposition en éléments simples

Prérequis
Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 25.1 — Uniquement des pôles simples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$ ....

b) $\dfrac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$ ....

Calcul 25.2

Même exercice.

a) $\dfrac{X+1}{(X+2)(X+\mathrm{e})}$ ....

b) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$ ....

c) $\dfrac{X^2+2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$ ....

Calcul 25.3 — Avec des pôles multiples.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$ ..

b) $\dfrac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$ ....

c) $\dfrac{1-X}{X(X+\pi)^2}$ ....

d) $\dfrac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$ ......

Calcul 25.4 — À vous de factoriser !.

Effectuer la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{X-3}{X^4-1}$ ....

b) $\dfrac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$ ....

Calcul 25.5 — Calculs de sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Calculer les sommes suivantes, après avoir fait une décomposition en éléments simples de leur terme général.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$.

Calcul 25.6 — Calculs de sommes.

Effectuer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$ ....

b) $\dfrac{3}{(X-1)(X+1)(X^2+X+1)}$ ....

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 25.7 — Pôles simples ou multiples.

Calculer les intégrales suivantes

a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ .....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ .....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 25.8 — Primitives.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-2x)^3}$ ....

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2}$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ ....

e) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+2x+3}$ ....

f) $x \longmapsto \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x+1)}$ ....

g) $x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+2)(x+1)}$ ....

h) $x \longmapsto \dfrac{x-2}{(x+1)^2(x-1)^2}$ ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{1}{2}\ln(3)+\dfrac{2}{3}\ln(2)$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)$ $\quad$ $1-2\ln(3)$ $\quad$ $1+\dfrac{\pi}{2(X-\pi)}-\dfrac{\pi}{2(X+\pi)}$

2 $\quad$ $\dfrac{2}{X+1}+\dfrac{1}{(X+1)^2}+\dfrac{1-2X}{X^2+1}$ $\quad$ $\dfrac{1}{\pi^2X}-\dfrac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\dfrac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{8}$

$\dfrac{1}{2X}+\dfrac{5}{6(X+2)}+\dfrac{2}{3(X-1)}+\dfrac{1}{(X-1)^2}.$ $\quad$ $\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad$ $-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3}$ $\quad$ $\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1+3i}{4(X-i)}-\dfrac{1-3i}{4(X+i)}$

$X-3-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{7}{X+2}$ $\quad$ $x\mapsto\dfrac{1}{4(1-2x)^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{9}\ln(5)+\dfrac{2}{9}\ln(2)$

$\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}$ $\quad$ $1-\dfrac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}-\dfrac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}$

$\dfrac{3}{2(X-1)}-\dfrac{1+i}{4(X-i)}-\dfrac{1-i}{4(X+i)}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\dfrac{-3}{X-2}+\dfrac{1}{X-3}+\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln(2)-\dfrac{1}{4}\ln(3)$ $\quad$ $x\mapsto\dfrac{1}{2}\dfrac{2x-1}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$

$\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{3}{2(X+1)}+\dfrac{X-1}{X^2+X+1}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{4}$ $\quad$ $1-\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{2(X+1)}+\dfrac{3}{2(X-1)}$

$\dfrac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\dfrac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}$ $\quad$ $x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{1+x}\right|$ $\quad$ $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{16}{3}\ln|x-2|$

► Réponses et corrigés page 158

Fiche n° 25. Décomposition en éléments simples

Réponses

25.1 a) .... $\boxed{X-3-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X+1}+\dfrac{7}{X+2}}$

25.1 b) .... $\boxed{1-\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{2(X+1)}+\dfrac{3}{2(X-1)}}$

25.1 c) .... $\boxed{1+\dfrac{\pi}{2(X-\pi)}-\dfrac{\pi}{2(X+\pi)}}$

25.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-2)(X+\mathrm{e})}+\dfrac{1}{(2-\mathrm{e})(X+2)}}$

25.2 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{2(X-1)}-\dfrac{1+i}{4(X-i)}-\dfrac{1-i}{4(X+i)}}$

25.2 c) .. $\boxed{1-\frac{5}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}-\frac{4}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-X)}}$

25.3 a) ..... $\boxed{\dfrac{-3}{X-2}+\dfrac{1}{X-3}+\dfrac{2}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}}$

25.3 b) .. $\boxed{\frac{2}{X}+\frac{2}{X^2}-\frac{11}{4(X-1)}+\frac{3}{2(X-1)^2}+\frac{3}{4(X+1)}}$

25.3 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{\pi^2 X}-\dfrac{1}{\pi^2(X+\pi)}-\dfrac{1+\pi}{\pi(X+\pi)^2}}$

25.3 d) ..... $\boxed{\frac{2}{X-i}+\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{2}{X-(1+i)}+\frac{1}{(X-(1+i))^2}}$

25.4 a) ... $\boxed{\dfrac{1}{X+1}-\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1+3i}{4(X-i)}-\dfrac{1-3i}{4(X+i)}}$

25.4 b) . $\boxed{\dfrac{1}{2X}+\dfrac{5}{6(X+2)}+\dfrac{2}{3(X-1)}+\dfrac{1}{(X-1)^2}.}$

25.5 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{4}}$

25.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3}}$

25.6 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{X+1}+\dfrac{1}{(X+1)^2}+\dfrac{1-2X}{X^2+1}}$

25.6 b) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{3}{2(X+1)}+\dfrac{X-1}{X^2+X+1}}$

25.7 a) .... $\boxed{1-2\ln(3)}$

25.7 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}\ln(3)+\dfrac{2}{3}\ln(2)}$

25.7 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}-4\ln(2)+2\ln(3)}$

25.7 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{9}\ln(5)+\dfrac{2}{9}\ln(2)}$

25.7 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{8}}$

25.7 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)-\dfrac{1}{4}\ln(3)}$

25.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{1+x}\right|}$

25.8 b) .... $\boxed{x\mapsto\dfrac{1}{4(1-2x)^2}}$

25.8 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)}$

25.8 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

25.8 e) .... $\boxed{2}$

25.8 f) . $\boxed{\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{16}{3}\ln|x-2|}$

25.8 g) $\boxed{x\mapsto\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}$

25.8 h) .... $\boxed{x\mapsto\dfrac{1}{2}\dfrac{2x-1}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|}$

Corrigés

25.1 a) Pour commencer, effectuons la division euclidienne de X^4-2 par $X(X+1)(X+2)=X^3+3X^2+2X$: on trouve $X^4-2=(X^3+3X^2+2X)(X-3)+7X^2+6X-2$. Ainsi, on a

$$\frac{X^4}{X(X+1)(X+2)}=X-3+\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}.$$

On écrit ensuite la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+2}.$$

Pour calculer a, on multiplie la fraction par X, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en 0 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times X = \frac{7X^2+6X-2}{(X+1)(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en 0, donne } a = \frac{-2}{2} = -1.$$

Pour calculer b, on multiplie la fraction par $X+1$, on l'écrit sous forme irréductible, et on évalue en -1 :

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+1) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+2)}, \text{ ce qui, évalué en } -1, \text{ donne } b = \frac{7-6-2}{(-1)(-1+2)} = 1.$$

Enfin, pour c,

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} \times (X+2) = \frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)}, \text{ ce qui, évalué en } -2, \text{ donne } c = \frac{28-12-2}{(-2)(-2+1)} = \frac{14}{2} = 7.$$

D'où

$$\frac{7X^2+6X-2}{X(X+1)(X+2)} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2},$$

donc

$$\frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)} = X - 3 - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2}.$$

25.3 a) Pour cette décomposition en éléments simples, pas de partie entière. On écrit la décomposition théorique :

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X-3}.$$

Par les méthodes du premier exercice, on détermine facilement $c = -3$ et $d = 1$. De même, en multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1, on obtient $b = 1$. Ensuite, en évaluant en 0, on obtient

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{-1} + b + \frac{c}{-2} + \frac{d}{-3},$$

donc $a = 1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 2$. Ainsi,

$$\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)} = \frac{-3}{X-2} + \frac{1}{X-3} + \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

25.4 a) Il suffit de remarquer que $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ et de se ramener à la méthode des pôles simples vue précédemment !

25.4 b) Il faut remarquer que $X^4 - 3X^2 + 2X = (X-1)^2(X+2)X$, puis utiliser les méthodes des pôles multiples !

25.5 a) Si l'on considère la fraction rationnelle $\frac{1}{(X-1)X(X+1)}$, alors

$$\frac{1}{(X-1)X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2(X-1)}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$

Donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(2-1)}\right) \text{ par télescopage } \qquad = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}.$$

25.5 b) On remarque que

$$\frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right).$$

Par télescopage, on obtient que cette somme vaut $-\dfrac{2}{n+2} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{3}$.

25.6 a) Déjà, il n'y pas de partie entière. Ensuite, la forme de la décomposition en éléments simples est

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en -1, on obtient $b=1$.
En évaluant en 0, on obtient

$$4 = a+b+d,$$

donc $a+d=3$.
En multipliant par X, en évaluant en $x \in \mathbb{R}$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$0 = a+c,$$

donc $c=-a$.
Enfin, en évaluant en 1, on obtient

$$\frac{6}{8} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c+d}{2},$$

donc

$$3 = 2a+b+2c+2d,$$

soit, comme $a+c=0$, et $b=1$, on en déduit que $2d = 3-1=2$, donc $d=1$.
Donc $a=2$, donc $c=-2$. Donc

$$\frac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1-2X}{X^2+1}.$$

25.7 a) On effectue la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X+1)}$:

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X+1)} = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1/2}^{1/2} 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \Big[-\ln(x+1) + \ln(1-x)\Big]_{-1/2}^{1/2} \\ &= 1 - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 2\ln(3).\end{aligned}$$

25.7 e) On remarque que

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1}{(2x)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{8}.$$

25.7 f) On effectue la décomposition en éléments simples $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$ de $\dfrac{X}{X^4-1}$.

On a $X^4-1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Donc, on écrit

$$\frac{X}{X^4-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Par la méthode déjà décrite, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$. En multipliant par x et en faisant $x \to +\infty$, $0 = a+b+c$, donc $c = -\dfrac{1}{2}$.

Enfin, en évaluant en 0, $-a+b+d=0$ donc $d=0$. Donc

$$\frac{X}{X^4-1}=\frac{1}{4(X-1)}+\frac{1}{4(X+1)}-\frac{X}{2(X^2+1)}=\frac{X}{2(X^2-1)}-\frac{X}{2(X^2+1)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x&=\frac12\int_2^3\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac12\left[\frac12\ln(x^2-1)-\frac12\ln(x^2+1)\right]_2^3\\&=\frac14(\ln(8)-\ln(10)-\ln(3)+\ln(5))\\&=\frac14(3\ln(2)-\ln(2)-\ln(5)-\ln(3)+\ln(5))=\frac12\ln(2)-\frac14\ln(3)\end{aligned}$$

....

25.8 a) On écrit que, $\dfrac{1}{X^2-1}=\dfrac{1}{2(X-1)}-\dfrac{1}{2(X+1)}$, donc une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}$ est

$$x\mapsto\frac12\ln|x-1|-\frac12\ln|x+1|=\frac12\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|.$$

....

25.8 c) On écrit que, si $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+2}=\frac12\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt2}\right)^2},$$

de primitive $x\mapsto\dfrac12\sqrt2\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt2}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt2}\right)$

....

25.8 d) L'idée pour primitiver cet élément simple est d'utiliser une forme canonique afin de se ramener à arctan :

$$\frac{1}{X^2+X+1}=\frac{1}{\left(X+\frac12\right)^2+\frac34}=\frac43\frac{1}{\frac43\left(X+\frac12\right)^2+1}=\frac43\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt3}X+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2+1}.$$

Ainsi, une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+x+1}$ est $x\longmapsto\dfrac43\dfrac{\sqrt3}{2}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt3}X+\dfrac{1}{\sqrt3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt3}X+\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$.

....

25.8 e) L'idée est de faire apparaître $\dfrac{u'}{u}$:

$$\frac{x}{x^2+2x+3}=\frac12\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{1}{x^2+2x+3}.$$

Or, une primitive de $x\mapsto\dfrac12\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$ est $x\mapsto\dfrac12\ln|x^2+2x+3|$. De plus,

$$\frac{1}{x^2+2x+3}=\frac{1}{(x+1)^2+2}=\frac12\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt2}\right)^2},$$

de primitive $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{\sqrt2}\right)$. Donc une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{x}{x^2+2x+3}$ est

$$x\mapsto\frac12\ln|x^2+2x+3|-\frac{1}{\sqrt2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt2}\right)$$

....

25.8 f) La décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}$ est

$$\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}=X+2+\frac{1}{6(X+1)}-\frac{1}{2(X-1)}+\frac{16}{3(X-2)},$$

donc $x\mapsto\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac16\ln|x+1|-\dfrac12\ln|x-1|+\dfrac{16}{3}\ln|x-2|$.

....