Fiche de calcul n° 19

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 19.2 — Pour s'échauffer – bis.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ....

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

Calcul 19.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 19.4 — Avec des paramètres - bis.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 19.5 — Le binôme de Newton.

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 19.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 19.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ....

Calcul 19.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ ....

b) Donner-en une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ....

Réponses mélangées

$\binom{2n}{n}$ $\quad 56 \quad$ $\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$ $\quad 10\,100 \quad$ $2^n \times n!$ $\quad 3^n \quad$ $(n+2)(n+1)$ $\quad \dfrac{1}{30}$

$\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}$ $\quad 140 \quad$ 6^n $\quad \dfrac{9!}{5!}$ $\quad \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad \dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}$ $\quad \dfrac{n(n-1)}{2}$

$15 \quad 0 \quad$ $\binom{2n}{n}$ $\quad n2^{n-1} \quad$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ $\quad 2^n \quad 720 \quad$ $n(n+1)2^{n-2}$ $\quad \dfrac{k+1}{n-k}$

12×15^n $\quad \dfrac{1}{(n+1)!}$ $\quad \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ $\quad 2^{n-1}$ $\quad \dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}$ $\quad \binom{9}{4}$ $\quad 2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

► Réponses et corrigés page 139

Fiche n° 19. Coefficients binomiaux

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

19.1 b) .... $\boxed{720}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

19.1 d) .... $\boxed{15}$

19.1 e) .... $\boxed{56}$

19.1 f) .... $\boxed{140}$

19.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

19.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

19.2 c) .... $\boxed{2^n \times n!}$

19.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

19.3 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

19.3 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

19.3 c) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

19.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

19.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

19.3 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

19.4 a) .... $\boxed{\dfrac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

19.4 b) .... $\boxed{\dfrac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

19.5 a) .... $\boxed{3^n}$

19.5 b) .... $\boxed{0}$

19.5 c) .... $\boxed{6^n}$

19.5 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

19.6 a) .... $\boxed{2 \times \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}}$

19.6 b) .... $\boxed{2^{n-1}}$

19.7 a) .... $\boxed{2^n}$

19.7 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

19.7 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

19.7 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

19.8 a) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

19.8 b) .... $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}$

19.8 c) .... $\boxed{\dbinom{2n}{n}}$

Corrigés

19.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

19.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

19.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

19.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

19.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

19.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

19.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

19.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

19.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

19.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente. On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

19.3 a) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$

19.3 b) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

19.3 c) On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} &= \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} \\ &= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.\end{aligned}$$

19.3 d) On calcule $\displaystyle\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1).$

19.3 e) On réduit au même dénominateur $\displaystyle\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$

19.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

19.4 a) On met chaque terme au même dénominateur, à savoir $2n(n+2)!$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} &= \frac{2n(n+1)(n+2)}{n! \times 2n(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{2n \times (n+1)!} &= \frac{n+2}{2n \times (n+1)! \times (n+2)} \\ \text{et} \qquad \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{n}{2 \times (n+2)! \times n}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} &= \frac{2n(n+1)(n+2) + n + 2 + n}{2n \times (n+2)!} \\ &= \frac{2(n+1)(n(n+2)+1)}{2n \times (n+2)!} = \frac{(n+1)(n^2+2n+1)}{n(n+2)!}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}.$$

19.4 b) On a
$$\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\frac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3}=\frac{(3n+3)!}{a^{3n+3}\times((n+1)!)^3}\times\frac{a^{3n}\times(n!)^3}{(3n)!}.$$
Or,
$$\begin{aligned}(3n+3)! &= (3n+3)\times(3n+2)\times(3n+1)\times(3n)!\\ a^{3n+3} &= a^{3n}\times a^3\\ ((n+1)!)^3 &= ((n+1)\times n!)^3=(n+1)^3\times(n!)^3.\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)}\times((n+1)!)^3}\div\frac{(3n)!}{a^{3n}\times(n!)^3} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{a^3\times(n+1)^3}\\ &= \frac{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}{a^3\times(n+1)^3}=\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}.\end{aligned}$$

19.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\times1^{n-k}=(2+1)^n=3^n$.

19.5 b) On constate que
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)\times\binom{n}{k}(-1)^k\times1^{n-k}=-1\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\times1^{n-k}=(-1)\times(-1+1)^n=0.$$

19.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{2n-k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}2^n\times2^{n-k}\binom{n}{k}=2^n\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\times1^k=2^n\times(1+2)^n=2^n\times3^n=6^n$.

19.5 d) On calcule
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2^{k+2}\binom{n}{k}\times3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n}2^2\times2^k\times\binom{n}{k}\times3^{n+1}\times3^{n-k}\\ &= 4\times3^{n+1}\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\times3^{n-k}\\ &= 4\times3^{n+1}\times(2+3)^n=4\times3^{n+1}\times5^n=4\times3\times3^n\times5^n=12\times15^n.\end{aligned}$$

19.6 a) On développe $\displaystyle(1+1)^n+(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+(-1)^k)$.

Or, $1+(-1)^k=2$ si k est pair et $1+(-1)^k=0$ si k est impair. Ainsi, on notant $P=\{k\in\mathbb{N},\ 0\leqslant k\leqslant n \text{ et } k \text{ pair}\}$, on a
$$(1+1)^n+(1-1)^n=\sum_{k\in P}\binom{n}{k}\times2=2\times\sum_{k\in P}\binom{n}{k}.$$
Or, si $k\in P$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=2p$. Comme $0\leqslant k\leqslant n$, on a alors $0\leqslant 2p\leqslant n$ et donc $0\leqslant p\leqslant\dfrac{n}{2}$.

Comme $p\in\mathbb{N}$, on peut aussi écrire $0\leqslant p\leqslant\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

Ainsi,
$$\sum_{k\in P}\binom{n}{k}=\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}\quad\text{et}\quad(1+1)^n+(1-1)^n=2\times\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}.$$

19.6 b) On déduit de la première question que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}=\frac{1}{2}((1+1)^n+(1-1)^n)=2^{n-1}$.

19.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x = 1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

19.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

19.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

19.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

19.8 a) On développe $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$. Ainsi, le coefficient de x^n vaut $\binom{2n}{n}$.

19.8 b) On obtient une contribution en x^n dans le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ à chaque fois que l'on multiplie un terme de la forme $a_k x^k$ dans le premier facteur avec un terme de la forme $b_{n-k}x^{n-k}$ dans le deuxième facteur, et ce pour toutes les valeurs de k entières naturelles et inférieures ou égales à n. Or, $(1+x)^n \times (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right)$.

Donc, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

19.8 c) On déduit, en comparant les réponses aux questions précédentes, que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.