

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 13.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ avec $t = \sin \theta$

b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$ avec $u = e^t$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$ avec $u = \sin t$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$ avec $u = \sin t$

f) $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calcul 13.2



Même exercice.

a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ avec $u = \cos t$

b) $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$ avec $u = e^t$

c) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$ avec $u = \frac{t}{2} - 1$

d) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$ avec $t = \tan u$

e) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ avec $u = \frac{1}{t}$

f) $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$ avec $u = \ln t$

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 13.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

b) $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 13.4



Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$

b) $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + \text{th}(x)}$ avec $u = e^x$

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$

d) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$

e) $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \quad 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) \end{array} \right. \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad 2e^2 \\ \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{array} \right. \quad -2((\sqrt{3} - 1) \ln(\sqrt{3} - 1) - 4 + 2\sqrt{3}) \\ \left\{ \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right. \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e + 1}{3}\right) \quad \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \quad \frac{\pi}{12} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \end{array} \right. \quad 2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x + \ln \tan(x) \end{array} \right. \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 114

Fiche n° 13. Changements de variable

Réponses

13.1 a).....	$\frac{\pi}{2}$	13.2 e).....	$\frac{\pi}{12}$
13.1 b).....	$\frac{\pi}{6}$	13.2 f).....	$\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$
13.1 c).....	$2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2}$	13.3 a).....	$2e^2$
13.1 d).....	$\frac{1}{4}$	13.3 b).....	$-2((\sqrt{3}-1) \ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3})$
13.1 e).....	$\frac{1}{12}$	13.4 a).....	$\begin{cases}]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x + \ln \tan(x) \end{cases}$
13.1 f).....	$2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$	13.4 b).....	$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \end{cases}$
13.2 a).....	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	13.4 c).....	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) \end{cases}$
13.2 b).....	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e+1}{3}\right)$	13.4 d).....	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{cases}$
13.2 c).....	$\frac{\pi}{2}$	13.4 e).....	$\begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$
13.2 d).....	$\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$		

Corrigés

13.1 a) On pose $t = \sin \theta$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ et donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

13.1 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 3]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1, \sqrt{3}]$. On a $\frac{dt}{du} = 2u$ et donc $dt = 2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u + u^3} du = 2 \left[\arctan u \right]_1^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

13.1 c) On pose $u = e^t$ avec $t \in [0, 1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1, e]$. On a $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$ et donc $dt = \frac{du}{u}$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{cht}} dt = \int_0^1 \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = \int_1^e \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = 2 \int_1^e \frac{1}{1+u^2} du = 2 \left[\arctan u \right]_1^e = 2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2}.$$

13.1 d) On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{du}{dt} = \cos t$ et donc $du = \cos t dt$. Ainsi, $\int_0^1 u^3 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$.

Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt = \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

13.1 e) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1 - \sin^2 t) \cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\frac{du}{dt} = \cos t$ donc $du = \cos t dt$. Ainsi, $\int_0^1 u^3(1 - u^2) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt = \left[\frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{6} u^6 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

13.1 f) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = 2u$.

Ainsi, $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt = \int_1^2 \frac{2u}{u^2 + u} du = 2 \int_1^2 \frac{1}{1 + u} du = 2 \left[\ln(1 + u) \right]_1^2 = 2(\ln(3) - \ln(2))$.

13.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0, \pi]$. On a $\frac{du}{dt} = -\sin t$. Ainsi, $\int_{-1}^1 \frac{1}{3 + u^2} du = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ et finalement,

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{u}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

13.2 b) On pose $u = e^t$ avec $t \in [0, 1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1, e]$. On a $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$ donc $dt = \frac{1}{u} du$.

Finalement, $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt = \int_1^e \frac{1}{2 + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \int_1^e \frac{1}{2u + 1} du = \left[\frac{1}{2} \ln(2u + 1) \right]_1^e = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e + 1}{3}\right)$.

13.2 c) On pose $u = \frac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2, 4]$, donc $t = 2u + 2$ et $u \in [0, 1]$. On a donc $dt = 2 du$.

Ainsi, $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t - t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - 4u^2}} du = \left[\arcsin u \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

13.2 d) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\frac{dt}{du} = (1 + \tan^2 u)$.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

13.2 e) On pose $u = \frac{1}{t}$ avec $t \in [\sqrt{2}, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = -\frac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}} \frac{1}{u^2} du = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = - \left[\arcsin u \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

13.2 f) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [e, e^2]$, donc $t = e^u$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = e^u$ et

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt = \int_1^2 \frac{u}{1 + u^2} du = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$$

13.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1, 2]$.

On a alors $\frac{dt}{du} = 2u$ d'où $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt = \int_1^2 2ue^u du$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\int_1^2 2ue^u du = \left[2ue^u \right]_1^2 - \int_1^2 2e^u du = 2e^2$.

13.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3, 4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3}, 2]$.

On a alors $\frac{dt}{du} = 2u$ d'où $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t} - 1)}{\sqrt{t}} dt = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u - 1)}{u} 2u du = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u - 1) du$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2 \int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u - 1) du = 2 \left[(u - 1) \ln(u - 1) \right]_{\sqrt{3}}^2 - 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du = -2((\sqrt{3} - 1) \ln(\sqrt{3} - 1) - 4 + 2\sqrt{3}).$$

13.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a, x) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$.

On calcule $\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} dt$ qui est aussi $\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t} dt$ en posant $u = \tan t$.

On a $\frac{1}{\cos^2 t} dt = du$ et, ainsi, $\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} dt = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = \left[u + \ln u\right]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln \tan(x) + C$.

13.4 b) Cette fonction est définie sur \mathbb{R} , y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à

$\int_0^x \frac{1}{1 + \text{th}(t)} dt$ dans laquelle on pose $u = e^t$ c'est-à-dire $t = \ln u$. On a donc $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$ et ainsi

$$\int_0^x \frac{1}{1 + \text{th}(t)} dt = \int_1^{e^x} \frac{1}{1 + \frac{u - \frac{1}{u}}{u}} \frac{1}{u} du = \int_1^{e^x} \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3} du = \left[\frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{4} \frac{1}{u^2}\right]_1^{e^x} = \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

13.4 c) La fonction est définie sur \mathbb{R}_+^* et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, on a $t = \ln(1 + u^2)$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = \frac{2u}{1 + u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u} \frac{2u}{1 + u^2} du = 2 \left[\arctan u \right]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} = 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) + C$.

13.4 d) La fonction est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}} dt = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u} du = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2 + 1} du = \left[\frac{3}{2} \ln(u^2 + 1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

13.4 e) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2 + 1}$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} du = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1} du = \arctan \sqrt{x^2 - 1} + C.$$