

Calcul matriciel

Prérequis

Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.



Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) $A^2 \dots$

d) $E \times B$

g) $D^2 \dots$

b) $A^3 \dots$

e) $A \times E$

h) $D \times C$

c) $B \times E$

f) $B \times A$

i) $B^T \times B$

Calcul 26.2 — Calcul de puissances.



On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k -ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) $A^2 \dots$	e) $B^3 \dots$	i) $C^k \dots$
b) $A^3 \dots$	f) $B^k \dots$	j) $D^2 \dots$
c) $A^k \dots$	g) $C^2 \dots$	k) $D^3 \dots$
d) $B^2 \dots$	h) $C^3 \dots$	l) $D^k \dots$

Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix}, \quad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \quad c_{ij} = \delta_{i, j+1} + \delta_{i, j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice (i, j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole \sum .

a) $A \times B \dots\dots\dots$	c) $B^T \times B \dots\dots\dots$
b) $B^2 \dots\dots\dots$	d) $A \times C \dots\dots\dots$

Calcul 26.4 — Deux calculs plus difficiles !.



Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a) $[A^2]_{i,j}$ b) $[C^2]_{i,j}$

Inversion de matrices

Calcul 26.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.



Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) $A \dots$	<input type="text"/>	d) $D \dots$	<input type="text"/>	g) $G \dots$	<input type="text"/>
b) $B \dots$	<input type="text"/>	e) $E \dots$	<input type="text"/>	h) $H \dots$	<input type="text"/>
c) $C \dots$	<input type="text"/>	f) $F \dots$	<input type="text"/>	i) $J \dots$	<input type="text"/>

Calcul 26.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.



On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A
inversible ..

c) CNS pour B
inversible ..

b) Inverse de A ...

d) Inverse de B ...

Réponses mélangées

$$\frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n^{k-1}D \quad \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Non inversible!} \quad 2^{i-j} \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 1 \quad \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad 17 \text{ (matrice } 1 \times 1)$$

$$\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1-\delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) \\ + (1-\delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}) \end{matrix}$$

$$2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1} \quad \begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i-1 \\ j-2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \dots & n^2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1) \quad \lambda \neq 1 \quad \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} \quad \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$$

► Réponses et corrigés page 162

Fiche n° 26. Calcul matriciel

Réponses

- 26.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$
- 26.1 b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$
- 26.1 c) 17 (matrice 1×1)
- 26.1 d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$
- 26.1 e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- 26.1 f) $(-5 \ 15 \ 3)$
- 26.1 g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
- 26.1 h) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 26.1 i) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$
- 26.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 26.2 b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 26.2 c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 26.2 d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
- 26.2 e) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$
- 26.2 f) $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$
- 26.2 g) $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$
- 26.2 h) $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$
- 26.2 i) $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$
- 26.2 j) $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$
- 26.2 k) $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$
- 26.2 l) $n^{k-1}D$
- 26.3 a) $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$
- 26.3 b) $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$
- 26.3 c) $2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$
- 26.3 d) $\binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$
- 26.4 a) $2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}$
- 26.4 b) $(1 - \delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) + (1 - \delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1})$
- 26.5 a) $\frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$
- 26.5 b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 - 2i \\ 1 & -1 + i \end{pmatrix}$
- 26.5 c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
- 26.5 d) $\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- 26.5 e) $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- 26.5 f) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

26.5 g) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

26.5 h) Non inversible!

26.5 i) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

26.6 a) $\lambda \neq 1$

26.6 b) $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

26.6 c) $\lambda \neq 1$

26.6 d) $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

Corrigés

26.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 c) La conjecture est alors immédiate : les termes diagonaux sont égaux à 1 et le terme (1, 2) est égal à k .

26.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

26.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

26.2 f) On remarque que les termes diagonaux valent 2^k et 3^k respectivement, et que, pour A^2 , $4 + 5 = 9$, pour A^3 , $8 + 19 = 27$, donc on peut conjecturer que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$.

26.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

26.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.

À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^n [D]_{ik} [D]_{kj} = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

26.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2D$.

26.2 l) La conjecture est alors évidente.

26.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned} [A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^i \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\ &= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^\ell \\ &= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\ &= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1} \end{aligned}$$

26.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^n 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

26.3 c) On calcule :

$$[B^\top \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^n [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^n 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

26.3 d) On calcule

$$[A \times C]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} (\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) = \binom{i-1}{j} + \binom{i-1}{j-2}$$

26.4 a) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leq i$. Alors

$$\begin{aligned} [A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\ &= \sum_{k=j}^i \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\ &= \sum_{k=j}^i \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\ &= \sum_{k=j}^i \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^i \binom{i-j}{k-j} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\ &= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}. \end{aligned}$$

26.4 b) Pour vérifier ses calculs, il est conseillé de regarder des exemples !

$$n = 4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 5 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} [C^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^n c_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^n (\delta_{i,k+1} + \delta_{i,k-1})(\delta_{k,j+1} + \delta_{k,j-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{i,k+1} \delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^n \delta_{i,k+1} \delta_{k,j-1} + \sum_{k=1}^n \delta_{i,k-1} \delta_{k,j+1} + \sum_{k=1}^n \delta_{i,k-1} \delta_{k,j-1}. \end{aligned}$$

Si $(i, j) \notin \{1, n\}^2$. Donc

$$[C^2]_{ij} = \delta_{i-1,j+1} + 2\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}.$$

Ceci est confirmé par la structure « tridiagonale espacée » .

Sinon, pour (i, j) quelconque dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on trouve

$$[C^2]_{ij} = (1 - \delta_{i,1})(\delta_{i-1,j+1} + \delta_{i,j}) + (1 - \delta_{i,n})(\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j-1}),$$

car $\delta_{1,k+1} = 0 = \delta_{n,k-1}$ pour tout k entre 1 et n .

26.5 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

26.5 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2/2 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_3 \end{aligned}$$

Donc B est inversible d'inverse $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

26.5 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C = \pi \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } C \text{ est inversible d'inverse } \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

26.5 h) On remarque que $L_3 = L_1 + 2L_2 + 2L_4$.

26.6 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftrightarrow L_1 \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array} \end{aligned}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{1-\lambda} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{1-\lambda} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda)L_3 \end{array} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda} L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

.....