Fiche de calcul n° 3

003A

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables !

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ ......

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rapelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a\neq 0$).

a) x^2-2x+1 ....

b) x^2+4x+4 ....

c) x^2+3x+2 ....

d) $3x^2+7x+1$ ....

e) $2x^2+3x-28$ ....

f) $-5x^2+6x-1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ ....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ ....

c) $xy+x+y+1$ ....

d) $xy-x-y+1$ ....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2(a^2+b^2)+16x^4(-a^2-b^2)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 ....

b) $(-9x^2+24)(8x^2+8)+64x^4-64$ ....

c) x^4+x^2+1 ....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ ....

e) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$.

Réponses mélangées

$2(3x-4)(10x+3)$ $\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ $\quad -2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$

$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ $\quad -5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$ $\quad (x-1)(y-1)$ $\quad 2-x+x^3-x^4-x^5$

$-8(x^2+1)(x-4)(x+4)$ $\quad (a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$ $\quad (x+y-z)(x+y+z)$

$(x+1)(y+1)$ $\quad 8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}$ $\quad x^5-x^3+x^2-1$ $\quad (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad (x+2)^2$ $\quad -28+21x$ $\quad 1+x^4$ $\quad x^4+x^2+1$

$(a^2+b^2)(y-4x^2)(y+4x^2)$ $\quad (14x+3y)(-12x+3y)$ $\quad -6(6x+7)$ $\quad (x-1)^2$

$3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$ $\quad -1-3x-3x^2+x^3$ $\quad x^5-x^3-x^2+1$

$(x+y)(x+1)^2$ $\quad 2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$ $\quad 1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

$x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ $\quad (x+1)(x+2)$ $\quad 4(5x+4)(-5x+1)$ $\quad -8(x+1)(x+16)$

► Réponses et corrigés page 87

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 - x + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x+7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x+4)(-5x+1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x-4)(10x+3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x+1)(x+16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x-1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x+2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{(x+1)(x+2)}$

3.4 d) .... $\boxed{3\left(x + \dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)}$

3.4 e) .... $\boxed{2\left(x + \dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)}$

3.4 f) .... $\boxed{-5(x-1)\left(x - \dfrac{1}{5}\right)}$

3.5 a) .... $\boxed{(x+y-z)(x+y+z)}$

3.5 b) .... $\boxed{(14x+3y)(-12x+3y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x+1)(y+1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x-1)(y-1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x+y)(x+1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)}$

3.6 c) .... $\boxed{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$

3.6 d) .... $\boxed{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}$

3.6 e) .... $\boxed{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2+x+1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right) = [(x+1)(x-1)]\left[(x+1)\left(x^2-x+1\right)\right] = \left(x^2-1\right)\left(x^3+1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big) = x^5-x^3-x^2+1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\dots$

....

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$.

....

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$.

....

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$.

....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big) = (x-1)(x+1)\big(x^2+1\big)$.

....

3.6 b) On calcule $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big)+64x^4-64 = -8\big(x^2+1\big)\big[9x^2-24-8\big(x^2-1\big)\big] = -8\big(x^2+1\big)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \big(x^2+1\big)-x^2 = \big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \big(a^2+b^2\big)\big(c^2+d^2\big).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....