Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon sens ».

Calcul 11.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. ☐

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x$ ☐

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . . ☐

Calcul 11.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ . . . . . ☐

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x\,\mathrm{d}x$ . . . . . . ☐

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} 1 - 2x\,\mathrm{d}x$ . . ☐

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$ . . . . . . ☐

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x - 5\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5 - 5x^3\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x$ . . . . ☐

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.

Calculer.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\mathrm{d}x$ . . . ☐

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x$ . . . ☐

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ . . . . ☐

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ . . . ☐

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ . . . . . . ☐

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ . . . . ☐

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5 \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ ......

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Arcsin} x \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

Positif	$\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}$	$-\ln 3$	0	$\frac{2\pi}{9}$	$2(\mathrm{e}^3-1)$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}+1}$	0	1	0	$\frac{7}{48}$		
$\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$	8	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	-2	$3\mathrm{e}-4$	18	78	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{1}{384}$	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$		
$-\frac{1}{30}$	$-\frac{2}{101}$	$\frac{5}{8}$	-54	$\frac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2}$	0	Négatif	e^2	$\frac{99}{\ln 10}$	6	$\frac{1}{2}$	0	
50	$\frac{147}{2}$	0	14	Positif	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{3}$		

► Réponses et corrigés page 107

Fiche nº 11. Calcul d'intégrales

Réponses

11.1 a) $\boxed{\text{Positif}}$

11.1 b) $\boxed{\text{Négatif}}$

11.1 c) $\boxed{\text{Positif}}$

11.2 a) $\boxed{14}$

11.2 b) $\boxed{50}$

11.2 c) $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

11.2 d) $\boxed{-54}$

11.2 e) $\boxed{0}$

11.2 f) $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

11.3 a) $\boxed{8}$

11.3 b) $\boxed{-2}$

11.3 c) $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

11.3 d) $\boxed{0}$

11.3 e) $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

11.3 f) $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

11.4 a) $\boxed{0}$

11.4 b) $\boxed{1}$

11.4 c) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

11.4 d) $\boxed{18}$

11.4 e) $\boxed{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}}$

11.4 f) $\boxed{-\ln 3}$

11.5 a) $\boxed{78}$

11.5 b) $\boxed{2(\mathrm{e}^3 - 1)}$

11.5 c) $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

11.5 d) $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

11.5 e) $\boxed{6}$

11.5 f) $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

11.6 a) $\boxed{0}$

11.6 b) $\boxed{0}$

11.6 c) $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

11.6 d) $\boxed{\dfrac{1}{384}}$

11.6 e) $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)}$

11.6 f) $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

11.7 a) $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}+1}}$

11.7 b) $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

11.7 c) $\boxed{\mathrm{e}^2}$

11.7 d) $\boxed{3\mathrm{e} - 4}$

11.7 e) $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

11.7 f) $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

11.8 a) $\boxed{0}$

11.8 b) $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

11.8 c) $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

11.8 d) $\boxed{\dfrac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}}$

11.8 e) $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

11.8 f) $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

11.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

11.1 b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{5} |\sin 7x|\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

11.1 c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ est donc négative.

11.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

11.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{7} -5\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{7} 5\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

11.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

11.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\frac{1}{2} \times AB \times (AD+BC) = \frac{1}{2} \times 6 \times (3+15)$.

11.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\int_{-2}^{2} \sin x \, dx = \int_{-2}^{0} \sin x \, dx + \int_{0}^{2} \sin x \, dx$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\int_{-2}^{0} \sin x \, dx$ et $\int_{0}^{2} \sin x \, dx$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

11.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

11.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

11.3 b) $\int_{1}^{3} 2x-5 \, dx = \Big[x^2-5x\Big]_{1}^{3} = (3^2-15)-(1^2-5) = -2$.

11.3 c) $\int_{-2}^{0} x^2+x+1 \, dx = \Big[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_{-2}^{0} = 0 - \Big(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\Big) = \frac{8}{3}$.

11.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.3 e) $\int_{0}^{1} x^5-x^4 \, dx = \Big[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}$.

11.3 f) $\int_{1}^{-1} x^{100} \, dx = \Big[\frac{1}{101}x^{101}\Big]_{1}^{-1} = -\frac{2}{101}$.

11.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.4 b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 1$.

11.4 c) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{1}^{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

11.4 d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{1}^{100} = 18$.

11.4 e) $\int_{-3}^{2} e^x \, dx = \Big[e^x\Big]_{-3}^{2} = e^2 - e^{-3}$.

11.4 f) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3$.

11.5 a) $\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \, dx = \Big[\frac{1}{8}(2x+1)^4\Big]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78$.

11.5 b) $\int_{-2}^{4} e^{\frac{1}{2}x+1} \, dx = \Big[2e^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^{4} = 2(e^3-1)$.

11.5 c) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\pi x+2} = \Big[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x+2|\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{\pi}\ln\Big(\frac{\pi+2}{2}\Big)$.

11.5 d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, dx = \Big[-\frac{1}{3}\cos(3x)\Big]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

11.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

11.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

11.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

11.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos x)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

11.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

11.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\frac{-1}{3}\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

11.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \frac{1}{2}.$

11.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

11.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

11.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1) - 2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

11.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

11.7 f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\frac{1}{2}\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

11.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

11.8 b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

11.8 c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

11.8 d) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{sh}(x)\Big]_0^1 = \mathrm{sh}\ 1 = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}.$

11.8 e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$

11.8 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3x)\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$