EXTREMUM D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES A VALEURS REELLES

Notations

- p est un entier supérieur ou égal à 2
- D est une partie de $\mathbb{R}^p$
- f une fonction de D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  On pourra donc écrire f sous la forme $\boxed{\begin{array}{llll} f: & D\subset\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\ldots,x_p) & \longmapsto & f(x_1,\ldots,x_p)\end{array}}$
- Les p variables $x_1,\ldots,x_p$ s'appellent <u>les variables de f</u>.
- x_1 est la première variable de f, x_2 est la deuxième variable de f,...
- Lorsque f est une fonction de 2 ou 3 variables, on préférera noter (x,y) ou (x,y,z) les variables de f.

1 rappel: fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont-elle vraies ou fausses?

1. Si $f'(a)=0$ alors f présente un extremum en a
2. Si f présente un extremum en $a\in I$ alors $f'(a)=0$

remarque 1 (***plan d"étude***)

*On retiendra que **le plan de recherche des extrema pour une fonction de plusieurs variables est identique à celui pour une fonction d'une seule variable réelle**: on commence par déterminer si le domaine de définition est ouvert*

- *Si c'est le cas, on détermine les points où la dérivée s'annule puis pour chacun d'eux on regarde s'il s'agit d'un extremum ou pas.*
- *Si ce n'est pas le cas, on détermine les éventuels extrema à l'intérieur du domaine (avec la méthode ci-dessus) puis on étudie "à la main" les autres points.*

2 extrema d'une fonction de plusieurs variables

définition 1: extremun local ou global

Soit D une partie de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et a un élément de D.

- On dit que f présente un maximum global [resp. minimun global] au point a lorsque

$$\forall x \in D, f(x) \leqslant f(a) \text{ [resp. } \forall x \in D, f(x) \geqslant f(a)]$$

- On dit que f présente un maximum local [resp. minimum local] au point a lorsque

il existe B une boule ouverte de centre a telle que

$$\forall x \in B \cap D, f(x) \leqslant f(a) \text{ [resp. } \forall x \in B \cap D, f(x) \geqslant f(a) \text{]}$$

- On appelle extremum un minimum ou un maximum

Les extrema globaux sont bien sûr aussi des extrema locaux.

exemple 1:

Etude en $a = (0,1,-2)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$

exemple 2:

Etude en $a = (0,0)$ de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 + y^2 \end{array}$

exemple 3:

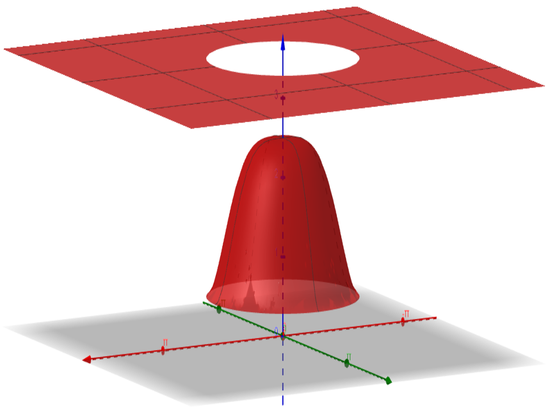
Etude en $a = (0,0)$ de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$

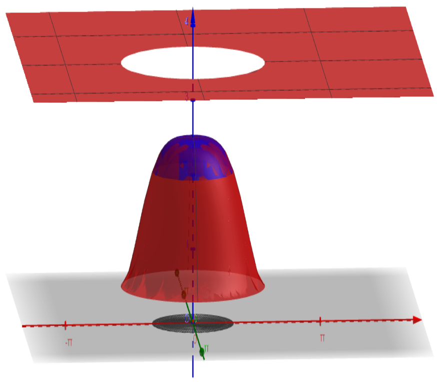
exemple 4:

Etude en $(0,0)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \begin{cases} \cos(x^2+y^2)+2 & \text{si } x^2+y^2 < \pi \\ 4 & \text{sinon} \end{cases}$

g possède-t-elle un maximun global sur $\mathbb{R}^2$? un minimun global sur $\mathbb{R}^2$?

(que deviennent ces résultats si dans la définition de g l'inégalité devient $x^2 + y^2 \leqslant 1$?)





définition 2: point critique=point en lequel le gradient est nul

On dit que le point $a \in D$ est un point critique de f lorsque $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) = 0$

théorème 1: condition nécessaire d'existence d'un extremum

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in D$ et $f \in C^1(D,\mathbb{R})$.
Si f présente un extremum local au point a **alors** a est un point critique de f, c'est à dire que toutes les dérivées partielles premières de f au point a sont nulles

théorème 2: rappel sur les fonctions d'une seule variable

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Si f présente un extremum local en a **alors** $f'(a) = 0$

remarque 2

Le théorème précédent nous indique que c'est parmi les points critiques de f qu'il faut chercher les éventuels extrema lorsque l'on est sur un ouvert!. Attention, uniquement si D est un ouvert!…car si D n'est pas un ouvert alors la chose est un peu plus délicate : il faut également regarder ce qui se passe sur la frontière de D...

exemple 5:

Etudier les extrema éventuels de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x + 3y^2 - 4yz \end{array}$

exemple 6:

Etude des extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$

théorème 3: théorème des bornes atteintes (admis)

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.
ce théorème signifie que si f est continue sur un domaine fermé et borné alors f possède un maximum et un minimum global

théorème 4: rappel sur les fonctions d'une seule variable

L'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment.
autrement dit
Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe $c \leqslant d$ deux réels tels que $f([a,b]) = [c,d]$
Ceci signifie également que tout fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes
rappel: un segment est un intervalle fermé et borné

3 extrema d'une fonction de deux variables

Nous allons maintenant étudier plus à fond le cas où D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f désigne une fonction de deux variables définie sur D et a est un point critique de f .

théorème 5: Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$.
Alors , en tout point $a = (x_0,y_0)$ de D, f admet un développement limité d'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}h_1^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_1h_2.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \frac{1}{2}h_2^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + ||h||^2\epsilon(h)$$

Souvent, on note $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $\quad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$

Ainsi en un point critique $a = (x_0,y_0)$ le DL 2 s'écrit .

définition 3: Matrice hessienne

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(D,\mathbb{R})$.
Alors, en tout point $a = (a_1,a_2)$ de D, on définit la matrice hessienne de f en a par

$$H = H(f)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

On a alors $\;{}^t\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.H.\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2$

$H = H(f)(a)$ est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.
En notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $H(f)(a)$, dans une bon de vecteurs propres, on a ainsi

$$rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2 = {}^t\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.H.\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda_1.X_1^2 + \lambda_2.X_2^2$$

Ainsi, sous certaines hypothèses *, on comprend que localement, au voisinage d'un point critique a, on a

$$sg(f(a+h) - f(a)) = sg(rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) = sg(\lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2)$$

Il est facile de voir que
i) si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors $\lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2$ est toujours positif
ii) si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors $\lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2$ est toujours négatif
iii) si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors $\lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2$ n'est pas de signe constante (même au voisinage de (0,0))

Comme on sait que $\det(H(f)(a)) = \lambda_1.\lambda_2$ et $\mathrm{tr}(H(f)(a)) = \lambda_1 + \lambda_2$, la distinction des cas ci-dessus peut se faire également en discutant sur le signe du déterminant et de la trace.

* on montre que l'inversibilité de H est une condition suffisante.

théorème 6: version simple

Soit f une fonction de classe C^2 définie sur un <u>ouvert</u> $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles.
Soit a un point critique, en lequel la matrice hessienne $H = H(f)(a)$ est <u>inversible</u>.

i) si les valeurs propres de H sont strictement positives alors f admet en a un minimum local

ii) si les valeurs propres de H sont strictement négatives alors f admet en a un maximum local

iii) si les valeurs propres de H sont de signes opposés alors f ne présente pas d'extremum local en a

théorème 7: version élaborée

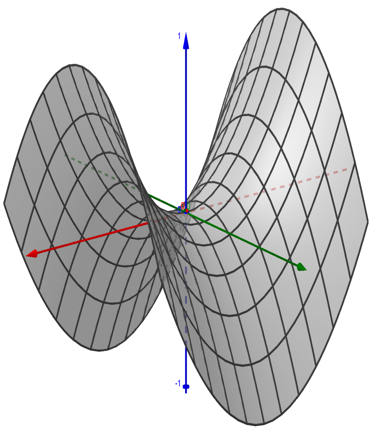
Soit f une fonction de classe C^2 définie sur un <u>ouvert</u> $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs réelles, et a un point critique.
On note $H(f)(a)$ la hessienne de f en a. Alors:

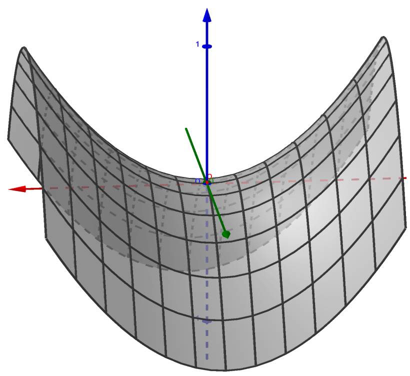
i) **si** $\det(H(f)(a)) < 0$ **alors** f ne présente pas d'extremum local en a car les valeurs propres sont de signes différents

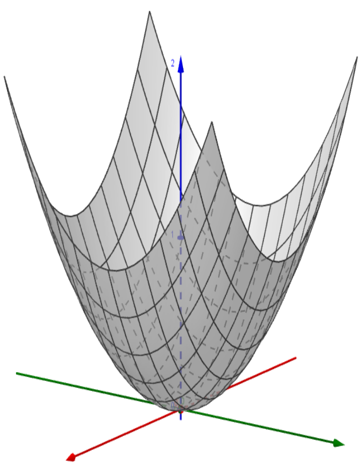
ii) **si** $\det(H(f)(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H(f)(a) > 0$ **alors** les valeurs propres sont positives et f présente <u>un minimum local</u> en a

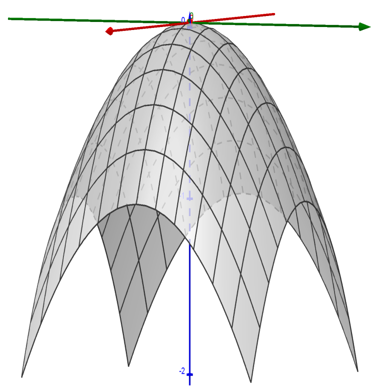
iii) **si** $\det(H(f)(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H(f)(a) < 0$ **alors** les valeurs propres sont négatives et f présente <u>un maximum local</u> en a

iv) **si** $\det(H(f)(a)) = 0$ **alors** il n'y a pas de conclusion









exemple 7:

Déterminer les extrema de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3+y^3-3xy \end{array}$

- Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et que $\mathbb{R}^2$ est un ouvert,

  On sait que si f présente un extremum en a alors a est un point critique.

- On a les équivalences

$$\overrightarrow{grad}_{(x,y)}f = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 3x^2-3y & = 0 \\ 3y^2-3x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x^2 \\ x & = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x^2 \\ x & = x^4 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = x^2 \\ x.(x^3-1) & = 0 \end{cases}$$

- Il y a ainsi deux points critiques $a=(0,0)$ et $b=(1,1)$

- La matrice hessienne de f en (x,y) est $H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

- **Etude du point** $a=(0,0)$

  On a $H = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\chi_H(X) = \begin{vmatrix} X & 3 \\ 3 & X \end{vmatrix} = X^2-3^2 = (X-3)(X+3)$

  Ainsi $sp(H) = \{-3,3\}$

  Comme les vp de H sont non nulles et de signes opposés,

  on peut affirmer que $\boxed{f \text{ ne présente pas d'extremum en } a=(0,0)}$

- **Etude du point** $b=(1,1)$

  On a $H = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et donc $\chi_H(X) = \begin{vmatrix} X-6 & 3 \\ 3 & X-6 \end{vmatrix} = (X-6)^2-3^2 = (X-9)(X-3)$

  Ainsi $sp(H) = \{3,9\}$

  Comme les vp de H sont strictement positives,

  on peut affirmer que $\boxed{f \text{ présente un minimum local en } b=(1,1)}$

  rem: ce minimum local vaut $f(1,1) = 1+1-3 = -1$

  On remarque que ce n'est pas un minimum global car $f(-2,0) = -8$

exemple 8: l'inversibilité de H est indispensable!

1. Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$ on a $x^2+y^3 = x^2+(x^2+y^2)\varepsilon(x,y)$ avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$
2. Justifier qu'au voisinage de $(0,0)$ le signe de x^2+y^3 n'est pas toujours égal au signe de x^2!

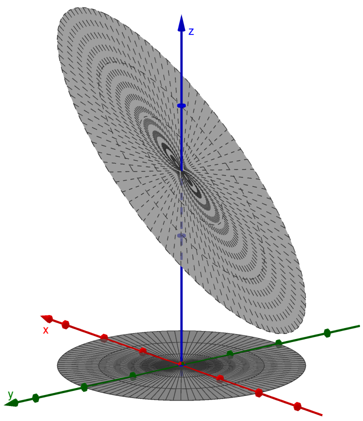
exemple 9:

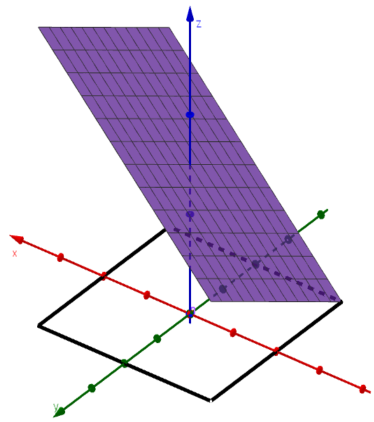
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy + y^2 e^{-x}$. Etudier les extrema de f

exemple 10:

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 2x + y + 5$

1. Etudier les extrema de f sur $[-1,+1] \times [-1,+1]$
2. Etudier les extrema de f sur le disque ouvert de centre (0,0) et de rayon un.
3. Etudier les extrema de f sur le disque fermé de centre (0,0) et de rayon un.





exemple 11: un exemple très compliqué d'étude de continuité

Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\boxed{f(x,y) = \begin{cases} 3x + y & \text{si } x \leqslant y \\ 2x + 2y & \text{si } x > y \end{cases}}$.

Notons $D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < x\}, D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > x\}$ et $D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$

1. Sur D_-, on a $f : (x,y) \mapsto 2x + 2y$ (expression polynomiale) . f est donc continue sur D_-
2. Sur D_+, on a $f : (x,y) \mapsto 3x + y$. même conclusion
3. Etudions la continuité en un point $a = (x_0,x_0)$ de D_0.
   - On a $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\(x,y)\in D_-}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\(x,y)\in D_-}} 2x + 2y = 4x_0$.

     on peut donc écrire $\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \eta_1 > 0, \forall x \in D_-, ||x - a|| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |f(x) - 4x_0| \leqslant \epsilon}$
   - On a $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\(x,y)\in D_0\cup D_+}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,x_0)\\(x,y)\in D_0\cup D_+}} 3x + y = 4x_0$.

     on peut donc écrire $\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \eta_2 > 0, \forall x \in D_0 \cup D_+, ||x - a|| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |f(x) - 4x_0| \leqslant \epsilon}$
   - Soit $\epsilon > 0$ fixé. Notons $\eta = \min(\eta_1,\eta_2)$.

     Comme $D_- \cup D_0 \cup D_+ = \mathbb{R}^2$,

     on peut affirmer que $\forall x \in \mathbb{R}^2$ on a $||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - 4x_0| \leqslant \epsilon$.

     Au total on a montré que $\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2, ||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon}$

     c'est à dire que f est continue en $a = (x_0,x_0)$
4. On a montré que f est continue sur D_-, D_+ et D_0: on a montré que f est continue sur $\mathbb{R}^2$

Cet exemple est à rapprocher de l'exercice suivant:

Montrer que la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \ln(1+t) & si\ t \geqslant 0 \\ \sin(t) & sinon \end{cases} \end{array}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.