intégrales généralisées

exercice 1 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_1^\infty \dfrac{dt}{t^2+4t}$ *converge et donner sa valeur*

exercice 2 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_0^\infty \dfrac{dt}{t^2+2\sqrt{2}t+4}$ *converge et donner sa valeur*

exercice 3 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_0^\infty \dfrac{t^3dt}{1+t^8}$ *converge et donner sa valeur. (on pourra poser* $u=t^4$*)*

exercice 4 (*)

A l'aide la la définition, montrer que $\int_{-\infty}^0 \dfrac{dt}{t^2-6t+9}$ *converge et donner sa valeur*

exercice 5 (***)

A l'aide de la définition, montrer que $\int_0^\infty \dfrac{t+3}{(t^2+4)(t+1)^2}dt$ *converge et donner sa valeur*
(on pourra chercher une décomposition de la forme $\dfrac{At+B}{t^2+4}+\dfrac{C}{t+1}+\dfrac{D}{(t+1)^2}$*)*

exercice 6 (***)

A l'aide de la définition, montrer que $\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+e^t)dt$ *converge et donner sa valeur.*
(on pourra poser $\theta=e^t$*)*

exercice 7 (*)

A l'aide de la règle des équivalents, déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^3 \dfrac{\mathrm{ch}(t)+1}{\mathrm{ch}(t)-1}dt$

exercice 8 (**)

A l'aide de la règle des équivalents, déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_{4/\pi}^\infty \ln(\cos(\dfrac{1}{t}))dt$

exercice 9 (**)

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^\infty \cos(3t)e^{-\sqrt{t}}dt$

exercice 10 (**)

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \cos(2t)e^{-t^2}dt$

exercice 11 (***)

Soit $0<a<\pi$.

Montrer que $I = \int_0^{\infty} \dfrac{dt}{t^2 - 2\cos(a).t + 1}$ *converge et vaut* $\dfrac{\pi - a}{\sin a}$

exercice 12 (*)

Déterminer la nature de $\int_0^1 \dfrac{1-\cos(t)}{t^2(t+1)}dt$

exercice 13 (*)

Déterminer la nature de $\int_1^{\infty} \dfrac{\ln t}{t}dt$

exercice 14 (*)

Déterminer la nature de $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{\sqrt{\sin t}}$

exercice 15 (*)

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} \dfrac{e^{\sin t}}{t}dt$

exercice 16 (***)

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} 2 + (t+3)\ln\dfrac{t+2}{t+4}dt$

exercice 17 (*)

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) dt$

exercice 18 (*)

Déterminer la nature des intégrales $I = \int_0^{1/2} \dfrac{t-1}{\ln t}dt$ *et* $J = \int_{1/2}^1 \dfrac{t-1}{\ln t}dt$

exercice 19 (***)

Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_0^1 \ln(\sin(t))dt$

exercice 20

exercice 21

Solutions

résolution 1 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+4t} = \dfrac{1}{t(t+4)}$ est définie et continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$,

- elle possède donc des primitives sur cet intervalle
- l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(t+4)}$ est généralisée uniquement en sa borne supérieure

- Pour $x \geqslant 1$, on note $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \dfrac{dt}{t(t+4)}$
- Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{X(X+4)} = \frac{1}{4}.\frac{1}{X} - \frac{1}{4}.\frac{1}{(X+4)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x \frac{dt}{t(t+4)} \\
&= \int_1^x \frac{1}{4}(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+4})dt \\
&= \frac{1}{4}\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t+4}dt \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln|t| - \ln|t+4|\right]_1^x \\
&= \frac{1}{4}(\ln(x) - \ln(x+4) + \ln 5) \\
&= \frac{1}{4}(\ln(x) - (\ln(x) + \ln(1+\frac{4}{x})) + \ln 5) \\
&= \frac{1}{4}(-\ln(1+\frac{4}{x}) + \ln 5)
\end{aligned}$$

Sous cette forme, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\ln 5}{4}$

On peut affirmer que

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2+4t} \text{ converge et vaut } \frac{\ln 5}{4}}$$

résolution 2 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2\sqrt{2}t+4}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$,

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle

– L'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{dt}{t^2+2\sqrt{2}t+4}$ est généralisée en sa borne supérieure uniquement

• Pour $x \geqslant 0$, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

On a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{dt}{t^2+2\sqrt{2}t+4} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{(t+\sqrt{2})^2+2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{\left(\dfrac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \dfrac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (on a donc $du = \dfrac{dt}{\sqrt{2}}$).

Ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{(x+\sqrt{2})/\sqrt{2}} \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan u\right]_1^{(x+\sqrt{2})/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \arctan 1\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

On peut affirmer que

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+2\sqrt{2}t+4} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$$

résolution 3

- La fonction $t : t \mapsto \dfrac{t^3}{1+t^8}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$:
  - elle possède donc des primitives sur cet intervalle
  - l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^3 dt}{1+t^8}$ est généralisée uniquement en sa borne supérieure

- Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \dfrac{t^3 dt}{1+t^8}$

  Le changement de variable indiqué est $u = t^4$ (et donc $du = 4t^3 dt$) ce qui donne

$$F(x) = \int_0^{x^4} \frac{du}{4(1+u^2)} = \frac{1}{4}\int_0^{x^4} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{4}[\arctan(u)]_0^{x^4} = \frac{1}{4}\arctan(x^4)$$

  Comme

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{4}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

  On peut affirmer que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^3 dt}{1+t^8} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{8}}$$

résolution 4 • La fonction $t : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-6t+9} = \dfrac{1}{(t-3)^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $]-\infty,0]$,

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle
– l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{dt}{t^2-6t+9}$ est généralisée uniquement en sa borne inférieure

• Pour $x \leqslant 0$, on pose $F(x) = \int_x^0 f(t)dt$

On a

$$F(x) = \int_x^0 \frac{dt}{(t-3)^2} = \left[\frac{-1}{t-3}\right]_x^0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{x-3}$$

Or

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-3} = 0 \text{ et ainsi } \lim_{x\to-\infty} F(x) = \frac{1}{3}$$

On peut affirmer que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2-6t+9} \text{ converge et vaut } \frac{1}{3}}$$

résolution 5 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t+3}{(t^2+4)(t+1)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.

– f admet donc des primitives sur cet intervalle
– et l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement

• La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est du type

$$f(t) = \frac{At+B}{t^2+4} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \text{ avec } (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$$

• On a $D = \lim\limits_{t\to -1}(t+1)^2 f(t) = \lim\limits_{r\to -1} \dfrac{t+3}{t^2+4} = \dfrac{2}{5}$

• On a $A \times (2i) + B = \lim\limits_{t\to 2i}(t^2+4)f(t) = \lim\limits_{t\to 2i} \dfrac{t+3}{(t+1)^2} = \dfrac{2i+3}{(2i+1)^2} = \dfrac{-1}{25} - \dfrac{18}{25}i$

donc $\boxed{B = \dfrac{-1}{25} \text{ et } A = \dfrac{-9}{25}}$

• On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t.f(t) = A + C$. Or $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t) = 0$ donc $\boxed{C = -A = \dfrac{9}{25}}$

• Pour tout $x \geqslant 0$ on pose

$$F(x) = \int_0^x \frac{At+B}{t^2+4} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} dt$$

On intègre chaque élément simple ensuite. On a

$$\int_0^x \frac{t}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{t^2+4}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+4)\right]_0^x = \frac{1}{2}(\ln(x^2+4) - \ln 4)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2} = \left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^x 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{(t/2)^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{x/2} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} \text{ (on a posé } u = t/2)$$

• On a donc

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{9}{25}\ln(x+1) - \frac{9}{50}\ln(x^2+4) - \frac{2/5}{1+x} - \frac{1}{50}\arctan(x/2) + \frac{2}{5} + \frac{9}{25}\ln 2$$

• Ensuite, on s'intéresse à la limite quand x tend vers $+\infty$. En particulier on a

$$\begin{aligned}\frac{9}{25}\ln(x+1) - \frac{9}{50}\ln(x^2+4) &= \frac{9}{25}(\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})) - \frac{9}{50}(\ln(x^2) + \ln(1+\frac{4}{x^2})\\ &= \frac{9}{25}\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{9}{50}\ln(1+\frac{4}{x^2})\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\dfrac{1}{50}\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{25}\ln 2.$

Conclusion $\boxed{\int_0^\infty f(t)dt \text{ converge et vaut } -\dfrac{\pi}{100} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{25}\ln 2}$

résolution 6

- La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(1+e^t)$ est continue sur $[0,+\infty[$
  - f admet donc des primitives sur cet intervalle
  - et l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement
- Pour $x \geqslant 0$ on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)dt$

On effectue le changement de variable $\theta = e^t$ (et donc $d\theta = e^t dt$). Cela donne

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)dt = \int_1^{e^x} \frac{\ln(1+\theta)}{\theta^2}d\theta$$

On effectue maintenant une intégration par parties
en posant $u(\theta) = \ln(1+\theta)$ (et donc $u'(\theta) = \frac{1}{1+\theta}$) et $v'(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$ (et on choisit $v(\theta) = \frac{-1}{\theta}$)

$$F(x) = \left[-\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\right]_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{d\theta}{\theta(1+\theta)}$$

Une décomposition en éléments simples donne $\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$
et ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\right]_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+1}d\theta \\ &= \left[-\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\right]_1^{e^x} + [\ln(\theta) - \ln(\theta+1)]_1^{e^x} \\ &= \ln(2) - e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + \ln 2 \end{aligned}$$

On détermine maintenant proprement les limites

- Comme $e^{-x}\ln(1+e^x) = e^{-x}(\ln(e^x(1+e^{-x}))) = e^{-x}(x + \ln(1+e^{-x}))$
  on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^x) = 0$
- Comme $\ln(e^x) - \ln(e^x+1) = \ln\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}$
  on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x) - \ln(e^x+1) = 0$

On a montré que final que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln 2$

Ceci prouve que

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-t}\ln(1+e^t)dt \text{ converge et vaut } 2\ln 2}$$

résolution 7

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(t)+1}{\mathrm{ch}(t)-1}$ est continue sur $]0,3]$
  - f admet donc des primitives sur cet intervalle
  - et l'intégrale est généralisée en sa borne inférieure uniquement
- Comme $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{ch}\, t = 1$ on a $\mathrm{ch}\, t + 1 \underset{0}{\sim} 2$
- On sait que $\mathrm{ch}(t) =_0 1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ et donc $\mathrm{ch}(t) - 1 = 1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2) - 1 = \dfrac{t^2}{2} + o(t^2) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$

  Ainsi $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{\dfrac{t^2}{2}} = \dfrac{4}{t^2}$
- Considérons la fonction $g : t \mapsto \dfrac{4}{t^2}$.
  i) la fonction g est continue sur $]0,4]$
  ii) le signe de g est stable au voisinage de 0^+
  iii) $f(t) \underset{0}{\sim} g(t)$

  D'après la règle des équivalents, on peut affirmer que $\int_0^4 f(t)dt$ et $\int_0^4 g(t)dt$ sont de même nature.

  Or $\int_0^4 g(t)dt = \int_0^4 \dfrac{4}{t^2}dt$ est une intégrale de référence divergente,

  On peut donc affirmer que

$$\boxed{\int_0^4 f(t)dt = \int_0^4 \frac{\mathrm{ch}(t)+1}{\mathrm{ch}(t)-1}dt \text{ est une intégrale divergente}}$$

résolution 8

- Pour tout $t \geqslant \dfrac{4}{\pi}$ on a $0 < \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{\pi}{4}$

Comme la fonction cos est décroissante sur l'intervalle $[0, \dfrac{\pi}{4}]$ on peut en déduire que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \leqslant \cos(\frac{1}{t}) \leqslant \cos(0)$$

Ceci justifie que $\cos(\dfrac{1}{t}) > 0$ pour $t \geqslant \dfrac{4}{\pi}$

- La fonction $f : t \mapsto \ln(\cos(\dfrac{1}{t}))$ est continue sur $\left[\dfrac{4}{\pi}, +\infty\right[$
  - f admet donc des primitives sur cet intervalle
  - et l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement
- On sait qu'en 0 on a $\cos(u) = 1 - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

on a donc

$$\cos(\frac{1}{t}) =_{\infty} 1 - \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2}))$$

et ainsi

$$f(t) = \ln(1 - \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2})$$

- On sait qu'au voisinage de 0 on a $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

et comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2}) = 0$ on peut donc écrire ici

$$\begin{aligned} f(t) &= \ln(1 - \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2})) \\ &\underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2}) \\ &\underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2} \end{aligned}$$

- Considérons la fonction $g : t \mapsto -\dfrac{1}{2t^2} = \dfrac{-1/2}{t^2}$
  - i) la fonction g est continue sur $\left[\dfrac{4}{\pi}, +\infty\right[$
  - ii) le signe de g est stable au voisinage de $+\infty$
  - iii) $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$

D'après la règles des équivalents, on peut affirmer que $\int_{4/\pi}^{\infty} f(t)dt$ et $\int_{4/\pi}^{\infty} g(t)dt$ sont de même nature

Or $\int_{4/\pi}^{\infty} g(t)dt = \int_{4/\pi}^{\infty} \dfrac{-1/2}{t^2}dt$ est une intégrale de référence convergente,

On peut donc affirmer que

$$\boxed{\int_{4/\pi}^{\infty} f(t)dt = \int_{4/\pi}^{\infty} \ln(\cos(\frac{1}{t}))dt \text{ est une intégrale convergente}}$$

résolution 9

- La fonction $f : t \mapsto \cos(3t)e^{-\sqrt{t}}$ est définie et continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$
  - elle possède donc des primitives sur cet intervalle
  - L'intégrale $\int_1^{\infty} \cos(3t)e^{-\sqrt{t}}dt$ est généralisée uniquement en sa borne supérieure

- On remarque que $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$

  En effet:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^2.\cos(3t).e^{-\sqrt{t}} = \lim_{T\to+\infty} T^4.\cos(3T^2).e^{-T} = 0$$

  puisque
  - d'après le théorème des croissances comparées on a $\lim_{T\to+\infty} T^4.e^{-T} = 0$
  - et que le produit d'une fonction bornée $(t \mapsto \cos(3T^2))$ par une fonction qui tend vers zéro est encore une fonction qui tend vers zéro.

- Comme $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$
  et que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$,
  on peut affirmer par théorème que f est intégrable sur $[1, +\infty[$

  et ainsi que $\boxed{\int_1^{\infty} \cos(3t)e^{-\sqrt{t}}dt \text{ est une intégrale convergente}}$

résolution 10 • La fonction $f : t \mapsto \cos(2t)e^{-t^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$

- elle possède donc des primitives sur cet intervalle
- L'intégrale $\int_0^{\infty} \cos(2t)e^{-t^2}dt$ est généralisée uniquement en sa borne supérieure **(cette remarque est particulièrement importante ici)**

• On remarque que $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$

En effet:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^2.\cos(2t).e^{-t^2} = \lim_{T\to+\infty} T.\cos(2\sqrt{T}).e^{-T} = 0$$

puisque

- d'après le théorème des croissances comparées on a $\lim_{T\to+\infty} T.e^{-T} = 0$
- et que le produit d'une fonction bornée ($t \mapsto \cos(2\sqrt{T})$) par une fonction qui tend vers zéro est encore une fonction qui tend vers zéro.

• Comme $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$
et que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$,
on peut affirmer par théorème que f est intégrable sur $[1, +\infty[$

et ainsi que $\int_1^{\infty} \cos(2t)e^{-t^2}dt$ est une intégrale convergente

• Comme $\int_0^{\infty} \cos(2t)e^{-t^2}dt$ n'était généralisée qu'en $+\infty$, on a montré que $\boxed{\int_0^{\infty} \cos(2t)e^{-t^2}dt \text{ converge}}$

résolution 11 soit $0 < a < \pi$ fixé.

- On note $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2\cos(a).t + 1}$
- L'équation $t^2 - 2.\cos(a).t + 1 = 0$ ne possède pas de solutions réelles car

$$\Delta = 4\cos^2 a - 4 = -4.\sin^2 a < 0$$

- La fonction f est donc continue sur $[0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.
  Ainsi f possède des primitives sur cet intervalle et l'intégrale est généralisée en $+\infty$ uniquement
- Il est clair que l'intégrale est convergente car $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et l'on applique la règle des équivalents.
- On utilise la méthode classique en mettant sous forme canonique puis en effectuant un changement de variable.
  Soit $X \geqslant 0$

$$\begin{aligned} F(X) = \int_0^X \frac{dt}{t^2 - 2\cos(a).t + 1} &= \int_0^X \frac{dt}{(t-\cos a)^2 + \sin^2 a} \\ &= \frac{1}{\sin^2 a}\int_0^X \frac{dt}{\left(\dfrac{t-\cos a}{\sin a}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sin a}\left[\arctan\left(\frac{t-\cos a}{\sin a}\right)\right]_0^X \end{aligned}$$

- Comme $\sin a > 0$, on a $\lim\limits_{X\to\infty} \arctan\left(\dfrac{X-\cos a}{\sin a}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
- Comme la fonction arctan est impaire, on a

$$\arctan\left(-\frac{\cos a}{\sin a}\right) = -\arctan\frac{\cos a}{\sin a} = -\arctan\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-a)}{\cos(\frac{\pi}{2}-a)} = -\arctan(\tan(\frac{\pi}{2}-a))$$

- On sait que $\forall \theta \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[, \ \arctan(\tan\theta)) = \theta$
  Ici comme $a \in]0,\pi[$, on a $\dfrac{\pi}{2} - a \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ et ainsi affirmer que $\arctan(\tan(\dfrac{\pi}{2}-a)) = \dfrac{\pi}{2} - a\,!$
  Il est à noter ici que si $a \in]\pi,2\pi[$**, on a** $\arctan(\tan(\dfrac{\pi}{2}-a)) = \dfrac{3\pi}{2} - a \neq \dfrac{\pi}{2} - a$ **!**
- En résumé, on a prouvé que

$$\lim_{X\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\sin a}\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right) = \frac{\pi - a}{\sin a}$$

résolution 12 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^3(t+1)}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle

– l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1-\cos(t)}{t^3(t+1)}dt$ est généralisée uniquement en sa borne supérieure

- On a

$$1-\cos t = 1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)) = \frac{t^2}{2}+o(t^2) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

et

$$t^3(t+1) \underset{0}{\sim} t^3$$

donc

$$f(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2t^3} = \frac{2}{t}$$

- Considérons la fonction $g : t \mapsto \dfrac{2}{t}$

i) la fonction g est continue sur]0,1]

ii) le signe de g est stable au voisinage de 0^+

iii) $f(t) \underset{0^+}{\sim} g(t)$

D'après la règle des équivalents, on peut affirmer que $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_0^1 g(t)$ sont de même nature.

Or $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 \dfrac{1/2}{t}dt$ est une intégrale de référence divergente.

On peut donc affirmer que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^3(t+1)}dt \text{ est une intégrale divergente}}$$

résolution 13 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$

– elle possède des primitives sur cet intervalle

– l'intégrale $\int_1^{\infty} \dfrac{\ln t}{t} dt$ est généralisée en sa borne supérieure

- Je propose deux solutions

1. **A l'aide de la définition.**
   Pour $x \geqslant 1$ on note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.
   On a
   $$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^x = \frac{(\ln x)^2}{2}$$
   Comme $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ on en déduit que $\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t} dt \text{ est une intégrale divergente}}$

2. **A l'aide d'une minoration.**
   On a
   $$\forall x \geqslant e, 0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{\ln t}{t} = f(t)$$
   Comme $\int_e^{\infty} \dfrac{dt}{t}$ est une intégrale de référence divergente,
   on peut affirmer d'après *le théorème de comparaison des fonctions positives* que $\int_e^{\infty} f(t)dt$ diverge
   et ainsi
   $$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t} dt \text{ diverge aussi}}$$
   rem: comme l'intégrale n'était généralisée qu'en sa borne supérieure montrer que $\int_e^{\infty} f(t)dt$ converge revient à montrer que $\int_1^{\infty} f(t)dt$

résolution 14 • La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}$ est continue sur l'intervalle $]0,\pi/2]$

– elle possède donc des primitives sur cet intervalle

– l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{\sqrt{\sin t}}$ est généralisée en sa borne inférieure uniquement

• On a

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin t}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

• Considérons la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$

i) la fonction g est continue sur $]0,\pi/2]$

ii) le signe de g est stable au voisinage de 0^+

iii) $f(t) \underset{0^+}{\sim} g(t)$

D'après la règle des équivalents, on peut affirmer que $\int_0^{\pi/2} f(t)dt$ et $\int_0^{\pi/2} g(t)dt$ sont de même nature.

Or $\int_0^{\pi/2} g(t)dt = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente.

On peut donc affirmer que

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} \text{ est une intégrale convergente}}$$

résolution 15

- Notons $f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{\sin t}}{t} \end{array}$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$ donc:
  - f possède des primitives sur cet intervalle
  - l'intégrale $\int_1^{\infty} \dfrac{e^{\sin t}}{t} dt$ est généralisée en sa borne supérieure uniquement.

- Notons $g : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{-1}}{t} \end{array}$

  La fonction g est continue sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \geqslant 1, 0 \leqslant g(t) \leqslant f(t)$.

  D'après le *théorème de comparaison des fonctions positives* (théorème 5),
  comme $\int_1^{\infty} g(t)dt$ est une intégrale de Riemann de référence divergente,
  on peut affirmer que

$$\boxed{\int_1^{\infty} f(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \text{ est une intégrale divergente}}$$

résolution 16 • Notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f:[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 2+(t+3)\ln\dfrac{t+2}{t+4}\end{array}}$ et $I=\int_0^{\infty} f(t)dt$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ donc:
  - f possède des primitives sur cet intervalle
  - l'intégrale I est généralisée en sa borne supérieure uniquement.

- Déterminons un équivalent de f en $+\infty$ en utilisant $\ln(1+u)=_0 u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}+o(u^3)$

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2+(t+3)\ln\frac{t+2}{t+4} \\
&= 2+(t+3)\ln\frac{1+2/t}{1+4/t} \\
&= 2+(t+3)\left[\ln(1+\frac{2}{t})-\ln(1+\frac{4}{t})\right] \\
&= 2+(t+3)\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^2+\frac{1}{3}\left[\frac{2}{t}\right]^3+o(\left(\frac{2}{t}\right)^3)-\left[\frac{4}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{t}\right)^3+o(\left(\frac{4}{t}\right)^3)\right]\right) \\
&= 2+(t+3)\left[-\frac{2}{t}+\frac{6}{t^2}-\frac{56}{3t^3}+o(\left(\frac{1}{t}\right)^3)\right]
\end{aligned}$$

En développant on constate que vraiment beaucoup de termes disparaissent ce qui justifie le DL à l'ordre 3 dès le départ! En effet on trouve

$$f(t)=-\frac{2}{3t^2}+o(\left(\frac{1}{t}\right)^2)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{2}{3t^2}$$

- Notons $\boxed{g:t\mapsto-\dfrac{2}{3t^2}}$

ATTENTION! La fonction g N'est PAS continue sur $[0,+\infty[$!

…mais ce n'est pas si grave que cela!
car, grâce à la rédaction initiale où nous avons expliqué que l'intégrale I était généralisée uniquement en sa borne supérieure, il nous suffit de montrer que l'intégrale $\int_{\boxed{1}}^{\infty} f(t)dt$ converge.

La règle des équivalents(je ne détaille pas la rédaction ici) permet de conclure que

$$\int_{\boxed{1}}^{\infty} f(t)dt \text{ et } \int_{\boxed{1}}^{\infty} g(t)dt \text{ sont de même nature,}$$

et comme $\int_1^{\infty} g(t)dt=\int_1^{\infty}-\dfrac{2}{3t^2}dt$ est une intégrale de référence convergente,

on peut affirmer que $\int_{\boxed{1}}^{\infty} f(t)dt$ converge et donc que $I=\int_{\boxed{0}}^{\infty} f(t)dt$ converge aussi.

résolution 17 • La fonction $f : t \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est définie et continue sur $]0,1]$

- elle possède donc des primitives sur cet intervalle
- L'intégrale $\int_0^1 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) dt$ est généralisée en sa borne inférieure uniquement

• Notons $g : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 \end{array}$

La fonction g est continue sur $]0,1]$ et l'on a

$$\forall t \in]0,1], 0 \leqslant |f(t)| \leqslant g(t)$$

L'intégrale $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 1.dt$ étant une intégrale convergente,

on peut affirmer d'après *le théorème de comparaison des fonctions positives* que $\int_0^1 |f(t)|dt$ converge.

On en déduit que $\boxed{\int_0^1 f(t)dt \text{ converge}}$

résolution 18

1. **Etude de I**

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1/2]$
  - elle possède donc des primitives sur cet intervalle
  - l'intégrale I est généralisée en sa borne inférieure uniquement

- On remarque que $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$ et donc que f est prolongeable par continuité en 0
  Ceci permet de dire que $\boxed{\text{l'intégrale } I \text{ est faussement généralisée en } 0}$

2. **Etude de J**

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est définie et continue sur $[1/2,1[$
  - elle possède donc des primitives sur cet intervalle
  - l'intégrale J est généralisée en sa borne supérieure uniquement

- Nous allons déterminer un équivalent de f en 1^-
  On pose $t = 1 + h$
  On sait alors que
  $$\ln t = \ln(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} h = t - 1$$
  On en déduit que
  $$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{t-1}{t-1} = 1$$
  On pourrait alors appliquer la règle des équivalents, mais ici il est plus simple d'utiliser cet équivalent pour dire que $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = 1$ et donc que f est prolongeable par continuité en 1
  Ceci permet de dire que $\boxed{\text{l'intégrale } J \text{ est faussement généralisée en } 1}$

remarque:on vient de justifier que $\boxed{\textit{l'intégrale } \int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t} dt \textit{ est convergente}}$

résolution 19

- La fonction $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est définie et continue sur $]0{,}1]$
  - elle possède donc des primitives sur cet intervalle
  - l'intégrale I est généralisée en sa borne inférieure uniquement

- Nous allons montrer, avec la rigueur qui nous caractérise, que $\ln(\sin(t)) \underset{0^+}{\sim} \ln t$.
  Pour cela, on fait un retour à la définition.
  Soit $t \in]0{,}1]$ on a

$$\frac{\ln(\sin(t))}{\ln t} = \frac{\ln(\sin(t)) - \ln t + \ln t}{\ln t} = \frac{\ln\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)}{\ln t} + 1$$

  On sait que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$, on a donc, comme la fonction ln est continue en 1, par composition de limite $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln \frac{\sin t}{t} = \ln 1 = 0$
  Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$, on a prouvé que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(\sin(t))}{\ln t} = 1$ càd $\ln(\sin(t)) \underset{0^+}{\sim} \ln t$

- Notons $g : \begin{array}{rcl}]0{,}1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array}$

  i) la fonction g est continue sur $]0{,}1]$
  ii) le signe de g est stable au voisinage de 0^+ (négatif)
  iii) $f(t) \underset{0^+}{\sim} g(t)$

  D'après *la règle des équivalents*, on peut affirmer que $\int_0^1 f(t)dt$ et $\int_0^1 g(t)dt$ sont de même nature.

  Or $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale de référence convergente.

  On peut donc affirmer que $\boxed{I = \int_0^1 f(t)dt \text{ est une intégrale convergente}}$

$\boxed{\textbf{résolution 20}}$

résolution 21