Problème de Géométrie

$\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

a désigne un réel strictement positif fixé et θ un réel de l'intervalle $[0,\pi]$

On considère les droites D et D' définies respectivement par les équations

$$D \begin{cases} x-y &= 0 \\ z+a &= 0 \end{cases} \qquad\qquad D' \begin{cases} x+y &= 0 \\ z-a &= 0 \end{cases}$$

On note S la surface définie comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ équidistants de D et D'

Préliminaire:

1. Démontrer que la distance entre le point M et la droite Δ (droite définie comme passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}$) est donnée par la formule $d(M,\Delta) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\delta}||}{||\overrightarrow{\delta}||}$
2. λ étant un réel non nul fixé.
   On considère l'arc paramétré (C) : $\begin{cases} x &= t \\ y &= \lambda.t^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
   Déterminer la développée de l'arc (C)
   On vérifiera que le centre de courbure à l'instant $t=0$ a pour coordonnées $(0,\dfrac{1}{2\lambda})$

Problème

3. Vérifier qu' une équation cartésienne de S est $xy - 2az = 0$
4. Déterminer 4 symétries évidentes qui laissent globalement invariante S
5. Etudier l'intersection de S avec le plan d'équation $y = h$ où $h \in \mathbb{R}$.
   Représenter les cas $h = 0$ et $h = a$
6. Etudier l'intersection de S avec le plan d'équation $z = h$ où $h \in \mathbb{R}$.
   Représenter les cas $h = 0$ et $h = \dfrac{1}{a}$
7. Etudier la régularité de la surface S.
   En un point régulier $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de S, écrire l'équation cartésienne du plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ à S.
   Etudier localement la position du plan $\mathcal{P}_{M_0}$ et de S

8. On note Γ_θ la courbe intersection de S et du plan d'équation $x.\sin\theta - y.\cos\theta = 0$

   (a) Montrer que Γ_θ admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x &= t.\cos\theta \\ y &= t.\sin\theta \\ z &= t^2.\dfrac{\sin 2\theta}{4a} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

   (b) Déterminer la nature du projeté de Γ_θ sur le plan xOy

   (c) Déterminer la nature du projeté de Γ_θ sur le plan xOz et indiquer ses éléments.

   (d) En écrivant la représentation paramétrique de Γ_θ dans un repère orthonormé bien choisi, déterminer la nature de Γ_θ

   (e) On remarque que le point O est un point de la courbe Γ_θ.
   On note C_θ le centre de courbure de Γ_θ associé au point O.
   Montrer que pour $\theta \not\equiv 0\,[\dfrac{\pi}{2}]$ on a $\overrightarrow{OC_\theta} = \dfrac{2a}{\sin(2\theta)}.\overrightarrow{k}$
   Indiquer le lieu décrit par le point C_θ lorsque θ varie.

9. (a) Montrer que S admet pour représentation paramétrique $(\mathbb{R}^2,f)$ avec

   $$\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,2.a.v,u.v) \end{array}}$$

   La surface S est-elle une surface réglée?

   (b) Le plan tangent est-il le même le long d'une même génératrice?

   (c) Existe-t-il deux points d'une même génératrice en lesquels le plan tangent est identique?

$\boxed{\text{CORRECTION}}$

1. Voir la démonstration réalisée en classe.
2. Pour tout t réel on note $f(t) = M(t) = (t,\lambda.t^2)$
   On a ainsi
   - $f'(t) = (1,2\lambda.t)$ et $s'(t) = ||f'(t)|| = \sqrt{1+4\lambda^2t^2}$
   - $\overrightarrow{T} = \dfrac{f'(t)}{||f'(t)||} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\lambda^2t^2}}\begin{pmatrix}1\\2\lambda t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4\lambda^2t^2}}\begin{pmatrix}-2\lambda t\\1\end{pmatrix}$
   - Notons α le paramètre angulaire, on a par définition $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix} = \overrightarrow{T}$ et ainsi $\forall t \in \mathbb{R},\ \tan\alpha = 2\lambda t$

     En dérivant on obtient $\alpha'(t).(1+\tan^2\alpha(t)) = 2\lambda$, c'est à dire $\alpha'(t) = \dfrac{2\lambda}{1+4\lambda^2t^2}$
   - Par définition, on a $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds}$, c'est à dire ici

     $$\gamma(t) = \frac{\alpha'(t}{s'(t)} = \frac{2\lambda}{(1+4\lambda^2t^2)^{3/2}}$$
   - En notant C le centre de courbure, on a

     $$C(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\overrightarrow{N} = \cdots = \begin{pmatrix}-4\lambda^2t^3\\3\lambda t^2 + \dfrac{1}{2\lambda}\end{pmatrix}$$

     On a bien en particulier $C(0) = (0,\dfrac{1}{2\lambda})$

     $\boxed{\text{La développée de } (C) \text{ est la courbe de rep. paramétrique } \begin{cases}x &= -4\lambda^2t^3\\ y &= 3\lambda t^2 + \dfrac{1}{2\lambda}\end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$
3.
   - La droite D passe par le point $A = (0,0,-a)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   - La droite D' passe par le point $A' = (0,0,a)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d'} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.
   - Soit $M = (x,y,z)$
     - On a $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix}x\\y\\z+a\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z-a\\z+a\\x-y\end{pmatrix}$ et donc $d(M,D)^2 = \dfrac{2(z+a)^2+(x-y)^2}{2}$
     - On a $\overrightarrow{A'M}\wedge\overrightarrow{d'} = \begin{pmatrix}x\\y\\z-a\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z-a\\z-a\\-x-y\end{pmatrix}$ et donc $d(M,D')^2 = \dfrac{2(z-a)^2+(x+y)^2}{2}$
     - On en déduit l'équivalence

       $$M(x,y,z) \in S \iff 2(z-a)^2+(x+y)^2 = 2(z+a)^2+(x-y)^2 \iff xy = 2za$$

       Conclusion: $\boxed{\text{l'équation cartésienne de } S \text{ est bien } xy - 2az = 0}$

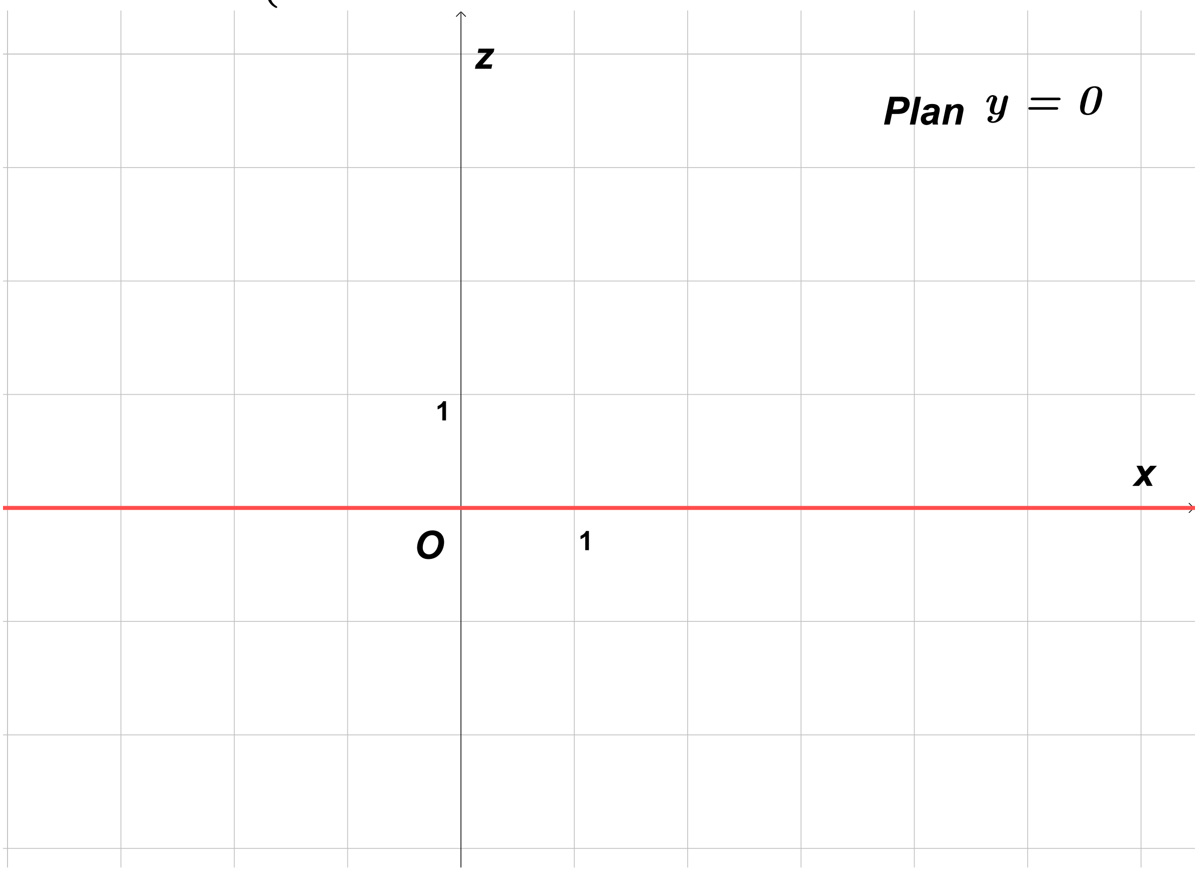
4.
   - Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
     On a l'équivalence
     $$M = (x,y,z) \in S \Longleftrightarrow M' = (-x,-y,z) \in S$$
     S **est donc globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe** (Oz)
   - On a l'équivalence
     $$M = (x,y,z) \in S \Longleftrightarrow M' = (-x,y,-z) \in S$$
     S **est donc globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe** (Oy)
   - On a l'équivalence
     $$M = (x,y,z) \in S \Longleftrightarrow M' = (x,-y,-z) \in S$$
     S **est donc globalement invariante par la symétrie par rapport à l'axe** (Ox)
   - On a l'équivalence
     $$M = (x,y,z) \in S \Longleftrightarrow M' = (y,x,z) \in S$$
     S **est donc globalement invariante par la symétrie par rapport au plan d'équation** $x - y = 0$

5. L'intersection de S avec le plan d'équation $y = h$ est caractérisé par le système

$$\begin{cases} xy - 2az &= 0 \\ y &= h \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} hx - 2az &= 0 \\ y &= h \end{cases}$$

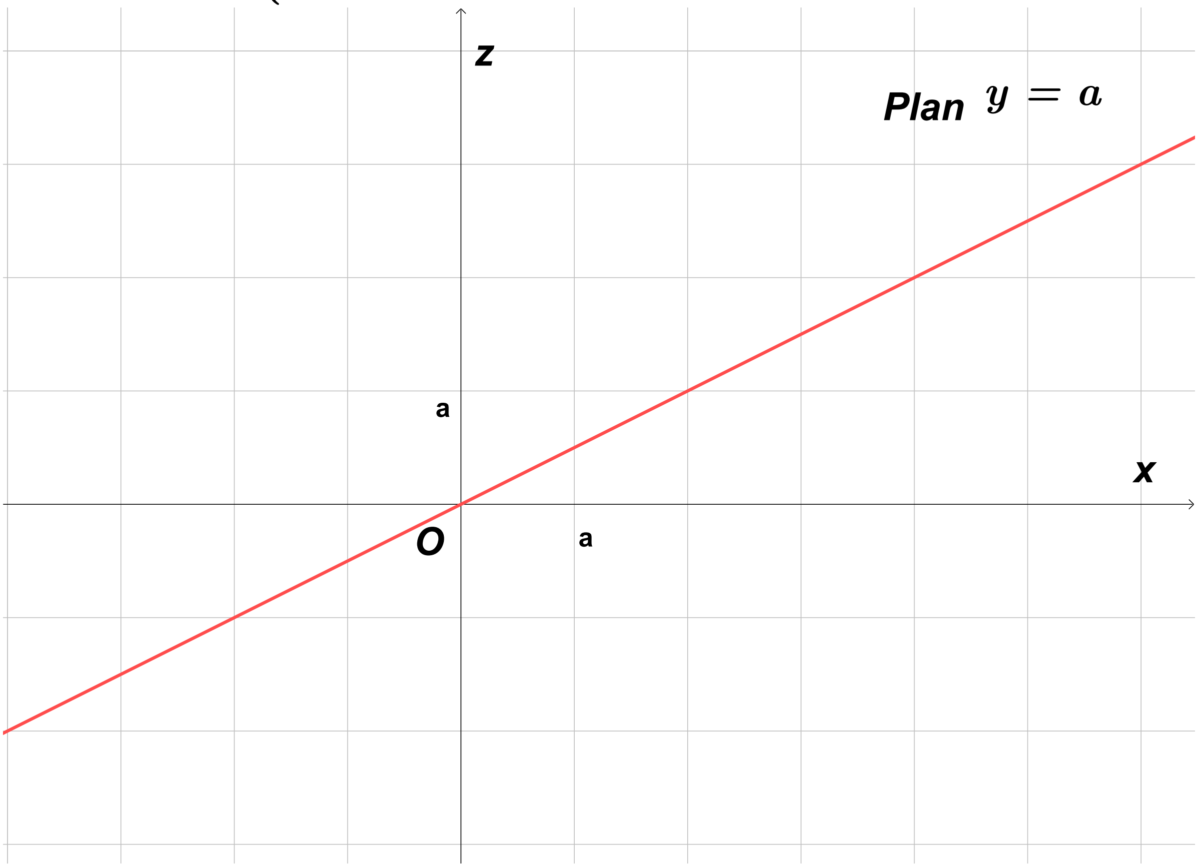
On reconnait l'intersection de deux plans non parallèles, l'intersection est une droite.

- cas $h = 0$.
  Le système donne $\begin{cases} z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$. On reconnait l'axe $(0x)$



- cas $h = a$.

  Le système donne $\begin{cases} z & = \frac{1}{2}x \\ y & = a \end{cases}$.



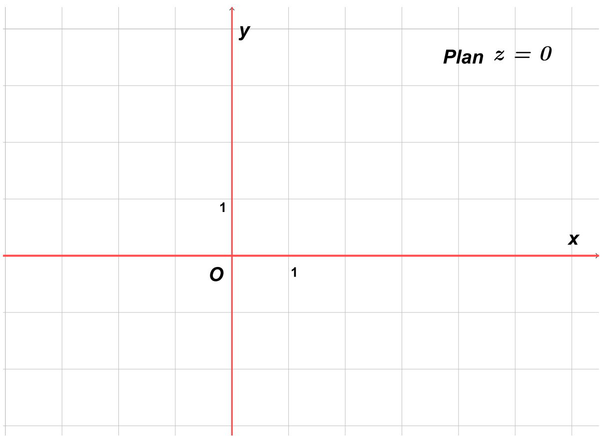
6. L'intersection de S avec le plan d'équation $z = h$ est caractérisé par le système

$$\begin{cases} xy - 2az & = 0 \\ z & = h \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy & = 2ah \\ z & = h \end{cases}$$

- cas $h = 0$.
  Le système s'écrit

$$\begin{cases} xy & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

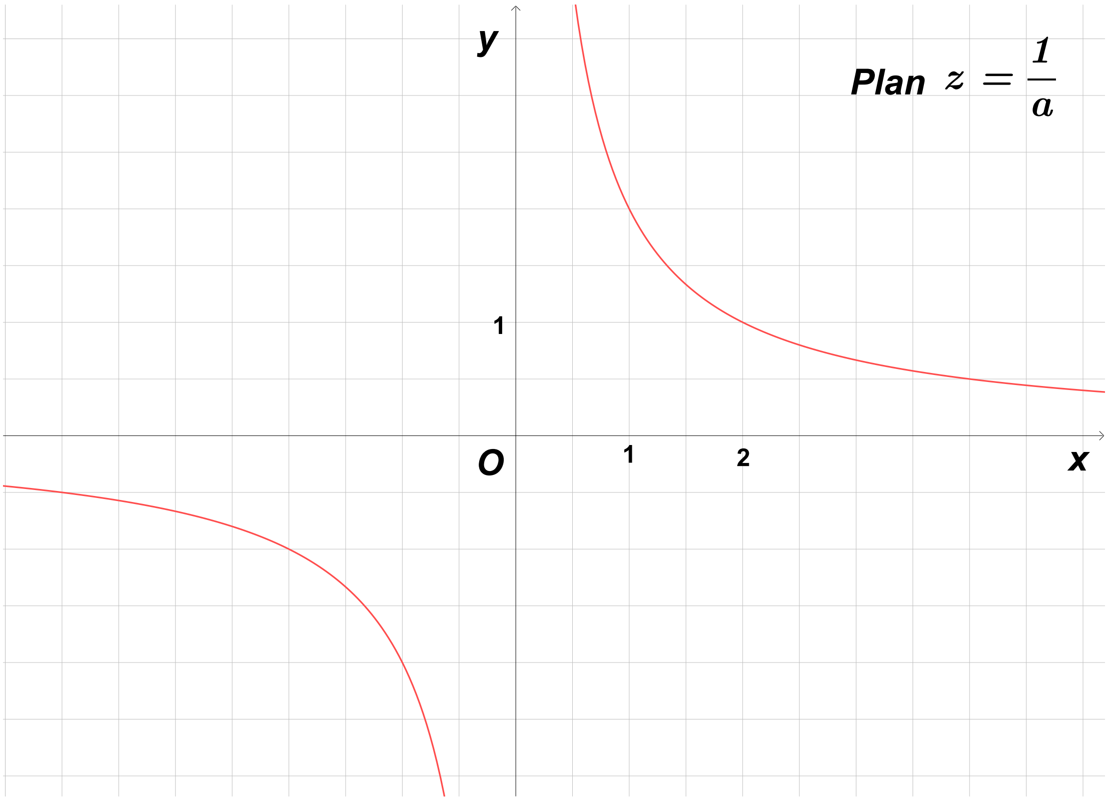
  On reconnait la réunion de deux droites: l'axe (Ox) et l'axe (Oy)



- cas $h = \frac{1}{a}$.
  Le système s'écrit

$$\begin{cases} xy &= 2 \\ z &= \frac{1}{a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y &= \frac{2}{x} \\ z &= \frac{1}{a} \end{cases}$$

  Il s'agit donc d'une hyperbole



7. Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de S

- Notons $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xy - 2az \end{array}$
  On a $\nabla_{M_0} F = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -2a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ car $a \neq 0$
  Ainsi M_0 est un point régulier de S.
  $\boxed{\text{Conclusion: la surface } S \text{ est régulière}}$

- Le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$ a pour équation cartésienne

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -2a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = y_0.x + x_0.y - 2a.z - 2x_0y_0 + 2az_0 = 0$$

  Comme $M_0 \in S$ on a $x_0y_0 = 2az_0$, et donc
  on trouve comme équation simplifiée $\boxed{\mathcal{P}_{M_0} : y_0x + x_0y - 2az - 2az_0 = 0}$

- Notons $\boxed{\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{2a} \end{array}}$

  La matrice de g en (x_0,y_0) est $H = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2a} \\ \dfrac{1}{2a} & 0 \end{pmatrix}$

  On a $\det(H) = \dfrac{-1}{4a^2} \neq 0$ donc H est inversible.

  On a $\chi_H(X) = X^2 - (\dfrac{1}{2a})^2 = (X - \dfrac{1}{2a})(X + \dfrac{1}{2a})$.

  Les valeurs propres sont donc $\dfrac{1}{2a}$ et $\dfrac{-1}{2a}$: comme elles sont de signes opposés, on peut conclure par théorème que **le plan tangent traverse la surface au voisinage de** M_0

8. (a) L'intersection est caractérisée par le système $\begin{cases} xy - 2az & = 0 \\ x\sin\theta - y\cos\theta & = 0 \end{cases}$.

   Afin de ne pas avoir différents cas à envisager, je propose la solution suivante.
   On remarque que

   $$x\sin\theta - y\cos\theta = 0 \iff \begin{vmatrix} x & \cos\theta \\ y & \sin\theta \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

   Ainsi on a

   $$x\sin\theta - y\cos\theta = 0 \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

   En revenant au système initial, on a bien

   $$\begin{cases} xy - 2az & = 0 \\ x\sin\theta - y\cos\theta & = 0 \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = t.\cos\theta \\ y & = t.\sin\theta \\ z & = \dfrac{xy}{2a} \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = t.\cos\theta \\ y & = t.\sin\theta \\ z & = \dfrac{t^2.\sin\theta\cos\theta}{2a} = \dfrac{t^2.\sin(2\theta)}{4a} \end{cases}$$

   (b) Le projeté de Γ_θ sur xOy a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x & = t.\cos\theta \\ y & = t.\sin\theta \\ z & = 0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   On reconnait la représentation paramétrique de la droite qui passe par le point O **et de vecteur directeur** $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$

   (c) Le projeté de Γ_θ sur xOz a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x & = t.\cos\theta \\ z & = t^2.\dfrac{\sin(2\theta)}{4a} \\ y & = 0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   Différents cas sont à envisager

   i) si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ le système devient $x = y = z = 0$.
   Il s'agit donc d'un point, le point O

   ii) si $\theta = 0$ ou π le système devient $\begin{cases} x & = \pm t \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   On reconnait une droite, l'axe Ox

iii) sinon le système équivaut à $\begin{cases} x &= t.\cos\theta \\ z &= \dfrac{\sin(2\theta)}{a.\cos^2\theta}.x^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On reconnait une parabole (quand t décrit $\mathbb{R}$, x décrira également $\mathbb{R}$)

(d) Nous allons déterminer un repère $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ avec $\vec{K}$ vecteur normal au plan d'équation $x.\sin\theta - y.\cos\theta = 0$.

- On pose $\vec{K} = \sin\theta.\vec{i} - \cos\theta.\vec{j} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{J} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  On pose ensuite $\vec{I} = \vec{J} \wedge \vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

- Notons $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$.

  Comme P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée, on sait que P est une matrice orthogonale, c'est à dire que $P^{-1} = {}^t P$

- Notons (X,Y,Z) les coordonnées dans ce nouveau repère.

  On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, et ainsi $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- Dans le nouveau repère, Γ_θ a donc pour représentation paramétrique

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t.\cos\theta \\ t.\sin\theta \\ t^2.\dfrac{\sin 2\theta}{4a} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

  Ce qui donne

$$\boxed{\begin{cases} X &= t \\ Y &= t^2.\dfrac{\sin 2\theta}{4a} \\ Z &= 0 \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

  On envisage deux cas

  i) **si $\theta \in \{0,\frac{\pi}{2},\pi\}$ alors on reconnait une droite, la droite (OX)**

  ii) **sinon, c'est une parabole**

(e) Soit $\theta \not\equiv 0\,[\frac{\pi}{2}]$ fixé.

On se place dans le nouveau repère.

- Notons $\lambda = \dfrac{\sin(2\theta)}{4a}$

  Γ_θ est la courbe tracée dans le plan XOY de représentation paramétrique $\begin{cases} X &= t \\ Y &= \lambda.t^2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- Le point O appartient effectivement à Γ_θ: c'est le point correspondant à $t = 0$

  D'après la question 2, le centre de courbure, noté C_θ, associé au point O est donc le point de coordonnées $(0,\dfrac{1}{2\lambda}) = (0,\dfrac{2a}{\sin(2\theta)}$ dans $(O,\vec{I},\vec{J})$

  Ainsi
$$\overrightarrow{OC_\theta} = \frac{2a}{\sin(2\theta)}\vec{J} = \frac{2a}{\sin(2\theta)}\vec{k}$$

- Lorsque θ décrit $]0,\pi[-\{\dfrac{\pi}{2}\}$, on a 2θ qui décrit $]0,2\pi[-\{\pi\}$, et ainsi $\sin(2\theta)$ décrit $[-1,+1]^*$ et $\dfrac{2a}{\sin(2\theta)}$ décrit $]-\infty,-2a] \cup [2a,+\infty[$
  (remarque: sans tenir se raisonnement, il était également possible d'étudier les variations de la fonction $\theta \mapsto \dfrac{2a}{\sin(2\theta)}$ sur $[-2a,+2a]^*$)
  Ainsi $\boxed{\text{le lieu décrit par } C_\theta \text{ est l'axe } (Oz) \text{ privé des points } (0,0,z) \text{ avec } |z| < 2a.}$

9. (a) - On va procéder par double inclusion.

  Notons S' le support de la nappe $(\mathbb{R}^2,f)$
  i) **Montrons que** $S' \subset S$
  Soit $M = (x,y,z) \in S'$
  Il existe donc $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x &= u \\ y &= 2av \\ z &= uv \end{cases}$
  On a alors $xy - 2az = u.(2av) - 2a(uv) = 0$,
  ce qui prouve que $M \in S$

  ii) **Montrons que** $S \subset S'$
  Soit $M = (x,y,z) \in S$
  On sait que l'on a $xy = 2az$ c'est à dire $z = \dfrac{xy}{2a}$
  Posons $u = x$ et $v = \dfrac{y}{2a}$
  On a alors $\begin{cases} x &= u \\ y &= 2av \\ z &= \dfrac{xy}{2a} = uv \end{cases}$
  ce qui prouve que $M = (x,y,z) \in S'$

- On remarque que l'on peut écrire

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, f(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ u \end{pmatrix}$$

A u fixé, on reconnait la paramétrisation de la droite passant par le point $\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ u \end{pmatrix}$.

S est donc bien une surface réglée, car ses lignes coordonnées à u fixé sont des droites!

(b) Comme par théorème, on sait que le plan tangent en point $M(u_0,v_0)$ d'une surface réglée contient la génératrice qui passe par ce point, le plan tangent est le même le long d'une génératrice ssi la direction de son vecteur normal est constante, c'est à dire ici, si la direction du vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)$ est indépendant de v_0.

Le calcul donne

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2av_0 \\ -u_0 \\ 2a \end{pmatrix}$$

On peut constater que cette direction n'est jamais la même pour deux valeurs distinctes de v_0 (et ainsi on répond à la question (c) également !).
En effet, soit $v_1 \neq v_0$, on a

$$\begin{pmatrix} -2av_0 \\ -u_0 \\ 2a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2av_1 \\ -u_0 \\ 2a \end{pmatrix} = \underbrace{(v_0 - v_1)}_{\neq 0} . \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4a^2 \\ 2au_0 \end{pmatrix}}_{\neq \vec{0}} \neq \vec{0}$$

Conclusion: en deux points d'une même génératrice les plans tangents sont toujours distincts: a fortiori, le plan tangent n'est pas le même le long d'une même génératrice!