JOLI PROBLEME D'ANALYSE !

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$

1. (a) Montrer que f est bien définie sur $I =]-1, +\infty[$.

   (b) Montrer que : $\forall x \in I, \quad f(x+1) + f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

2. (a) Montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > -1$.
   En déduire que f est continue sur I.

   (b) En déduire, à l'aide du 1)b), la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1 à droite ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de -1 à droite.

3. Pour x dans I et $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k(x) = \int_0^1 t^x (\ln t)^k dt$.

   A l'aide d'une intégration par parties, montrer par récurrence que $I_k(x)$ converge et déterminer une relation reliant $I_k(x)$ et $I_{k+1}(x)$ En déduire $I_k(x)$ pour k dans $\mathbb{N}$.

4. On pose, pour k dans $\mathbb{N}$ et x dans I, $\phi_k(t,x) = \dfrac{(\ln t)^k}{1+t} t^x$

   (a) Montrer que, pour tout x dans I, $t \mapsto \phi_k(t,x)$ est intégrable sur $]0,1]$.

   (b) Soit $a > -1$, montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \dfrac{(\ln t)^k}{1+t} t^x dt$

   (c) En déduire que f est C^∞ sur I

5. (a) Montrer que $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(x| \leq |I_n(x)| = \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n!}{2} \leq |f^{(n)}(0)| \leq n!$

   (c) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

   (d) On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral(sauriez-vous la redémontrer?) :
   Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle contenant 0 et x alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \text{ où } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

   i. En utilisant cette formule, montrer que $\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

   ii. Montrer que pour $x \in]-\dfrac{1}{2}, 0[$, $0 > \dfrac{x}{x+1} > -1$

   iii. En déduire que $\forall x \in]-\dfrac{1}{2}, 0[, \quad f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

1 a) • soit $x > -1$ fixé

– la fonction $g : t \mapsto \frac{t^x}{1+t} = \frac{e^{x \ln t}}{1+t}$ est C^0 sur $]0,1]$

– l'intégrale $\int_0^1 g(t)\,dt$ est donc généralisée en 0 –

– on a $g(t) \underset{0^+}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ avec $\frac{1}{t^{-x}} > 0$ Règle des équivalents

or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$ cv (car $-x < 1$) on peut dire que $\int_0^1 g(t)dt$ cv

Ccl : pour tout $x > -1$, $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$ est une intégrale cv

donc la fonction f est bien définie sur $]-1, +\infty[$

b) soit $x > -1$

$$f(x+1) + f(x) = \int_0^1 \frac{t^x.(t+1)}{t+1}\,dt = \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1}$$ –

easy !

2(a) soit $a > -1$ ②

Nous allons mq f est C^0 sur $[a,+\infty[$ en utilisant le Théo de continuité sous le signe intégral.

on pose $\boxed{\begin{array}{l} h :]-1,+\infty[\times]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x, t) \longmapsto \dfrac{t^x}{1+t} \end{array}}$ → on définit tjrs une fx de 2 variables.

- à x fixé ds $[a,+\infty[$ la fonction $h_x : t \mapsto h(x,t)$ est C^0 sur $]0;1]$
- à t fixé ds $]0,1]$, ——— $h_t : x \mapsto h(x,t)$ ——— $[a,+\infty[$
- posons $\boxed{\begin{array}{l} \varphi :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto \dfrac{t^a}{1+t} \end{array}}$

  - φ est C^0 sur $]0,1]$
  - φ est intégrable sur $]0,1]$ car $\int_0^1 |\varphi(t)|dt = \int_0^1 \frac{t^a}{1+t}dt = f(a)$
  - $\forall t \in]0,1], \forall x \in [a,+\infty[, \ |h(x,t)| \leq \varphi(t)$

  en effet : soit $t \in]0,1]$ et $x \geq a$

  $\left\{ \begin{array}{ll} \text{on} \quad a \leq x & \\ \text{et} \quad a \ln t \geq x \ln t & \text{car } \ln t \leq 0 \\ \text{puis } e^{a\ln t} \geq e^{x \ln t} & \text{car la fx exp est } \nearrow \\ \text{enfin } \dfrac{t^a}{1+t} \geq \dfrac{t^x}{1+t} \geq 0 & \text{car } \dfrac{1}{1+t} > 0 \end{array}\right.$

Ccl : on peut affirmer que f est C^0 sur $[a,+\infty[$.

* Ainsi f est C^0 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > -1$,
  on a f C^0 sur $\bigcup_{a>-1} [a;+\infty[=]-1,+\infty[= I$

cqfd

rédaction recommandée pour rappel de jury banque PT !

2 b) . cô f est C^0 en 0 on a $\lim_{x\to -1} f(x+1) = f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$ (3)

. cô $\forall x > -1$ $f(x) = \frac{1}{x+1} - \cancel{f}(x+1)$

et $\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$, on a donc $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

. on a aussi $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to -1} 1 - (x+1) f(x+1) = 1 - 0 . \ln 2 = 1$

Ccl : $\boxed{f(x) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{x+1}}$

3) Notons P_k : " $I_k(x)$ converge "

~~soit $x > -1$~~

→ Initialisation : P_0 est vraie

soit $T > 0$, $\int_T^1 t^x . (\ln t)^0 dt = \int_T^1 t^x dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_T^1 \xrightarrow[T\to 0^+]{} \frac{1}{x+1} - 0$

Ccl : $\boxed{I_0(x) \text{ converge et vaut } \frac{1}{x+1}}$

→ Hérédité : on suppose P_k vraie pour $k \geq 0$ fixé quelconque

soit $T > 0$,

$$\int_T^1 t^x . (\ln t)^{k+1} dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} . (\ln t)^{k+1}\right]_T^1 - \frac{k+1}{x+1} \int_T^1 t^x (\ln t)^k dt$$

ipp ! $u(t) = (\ln t)^{k+1}$

$u'(t) = \frac{k+1}{t} . (\ln t)^k$

$v'(t) = t^x$

$v(t) = \frac{t^{x+1}}{x+1}$

$$= \underbrace{- \frac{T^{x+1}}{x+1} (\ln T)^{k+1}}_{\xrightarrow[T\to 0^+]{} 0 \ (\text{TCC})} - \frac{k+1}{x+1} \underbrace{\int_T^1 t^x . (\ln t)^k dt}_{\xrightarrow[T\to 0^+]{} I_k(x) \text{ hyp de réc}}$$

on trouve bien que $\lim_{T\to 0^+} \int_T^1 t^x . (\ln t)^{k+1} dt$ existe et est finie,

on a mq $I_{k+1}(x)$ converge, et l'on a $\boxed{I_{k+1}(x) = -\frac{k+1}{x+1} I_k(x)}$

3'

→ on a $I_0(x) = \frac{1}{x+1}$ et $\forall k \geq 0$, $I_{k+1}(x) = -\frac{k+1}{x+1} I_k(x)$

par une récurrence (immédiate) on a $I_k(x) = \frac{(-1)^k . k!}{(x+1)^{k+1}}$

4(a) soit $x > -1$ et $k \in \mathbb{N}$ fixé

on a $\forall t \in]0,1]$, $|\varphi_k(t,x)| = \frac{|\ln t|^k . t^x}{1+t} \leq |\ln t|^k . t^x$ car $1+t \geq 1$

or $\ln t \leq 0$ donc $|\ln t| = -\ln t$

d'où $\forall t \in]0,1]$, $0 \leq |\varphi_k(t,x)| \leq (-1)^k . (\ln t)^k . t^x$

cô $\int_0^1 (\ln t)^k . t^x dt = I_k(x)$ cv, on a $\int_0^1 (-1)^k . (\ln t)^k . t^x dt$ cv

et donc par thé de comparaison, on peut affirmer que

$\boxed{\int_0^1 |\varphi_k(t,x)| dt \text{ cv} \text{, càd } t \mapsto \varphi_k(t,x) \text{ est intégrable sur }]0,1]}$

4(b) soit $a > -1$ 4

on note P_k : « f est C^k sur $[a;+\infty[$ et $\forall x \geq a$ $f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x \, dt$ »

→ initialisation : Q2(a)

→ hérédité : on suppose la propriété P_k vraie à un $k \geq 0$ fixé quelconque.

- à $x \in [a;+\infty[$ fixé, la fonction $t \mapsto \Phi_k(t,x)$ est intégrable sur $]0,1]$ $\boxed{\text{(Q4a)}}$
- à $t \in]0,1]$ fixé, la fonction $x \mapsto \Phi_k(t,x)$ est C^1 sur $[a,+\infty[$

  et l'on a $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}(t,x) = \frac{(\ln t)^{k+1}}{1+t} \cdot t^x = \Phi_{k+1}(t,x)$
- à $x \in [a,+\infty[$ la fonction $t \mapsto \Phi_{k+1}(t,x)$ est C^0 sur $]0,1]$
- posons $\boxed{\begin{array}{l} \varphi :]0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{(\ln t)^{k+1}}{1+t} \cdot t^a \text{ ou } (\ln t)^{k+1} \cdot t^a \end{array}}$

  et elle marche bien !

5

Ccl : d'après le théorème de dérivabilité sous le signe $\int$, on a mq $f^{(k)}$ est C^1 sur $[a;+\infty[$, on a montré P_{k+1}.

→ conclusion : par le principe de récurrence on a mq.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k([a;+\infty[,\mathbb{R})$ et $f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} \cdot t^x \, dt$

(c) → soit $k \geq 0$

rédaction recommandée par le jury

où f est C^k sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > -1$,
donc f est C^k sur $\bigcup_{a>-1} [a;+\infty[=]-1;+\infty[= I$

→ ceci prouve que f est bien indéfiniment dérivable sur I
(c.à.d $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$)

5 (a) <u>soit $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$</u>

- on a déjà $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\int_0^1 \frac{(\ln t)^n . t^x}{1+t} dt\right| \leq \int_0^1 \frac{|\ln t|^n . t^x}{1+t} dt$

- or $\forall t \in]0,1[$, $\frac{|\ln t|^n . t^x}{1+t} \leq |\ln t|^n . t^x = (-1)^n . (\ln t)^n . t^x$

on a donc par <u>croissance de l'intégrale</u> :

$$\int_0^1 \frac{|\ln t|^n . t^x}{1+t} dt \leq (-1)^n \int_0^1 (\ln t)^n . t^x dt = (-1)^n I_n(x) = \frac{n!}{(x+1)^n}$$

(b) • on a déjà avec 5(a) : $\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{1^n} = n!$

• pour tout $t \in]0,1[$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{t+1}$

d'où $\left|f^{(n)}(0)\right| = \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{1+t} dt \geq \int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{2} dt = \frac{(-1)^n}{2} \underbrace{\int_0^1 (\ln t)^n dt}_{= I_n(0)}$

on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n!}{2} \leq \left|f^{(n)}(0)\right| \leq n!$

(c) Notons $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

→ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 1$ on a $\text{Rayon}(\sum a_n x^n) \geq \text{Rayon}(\sum x^n) = 1$

→ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq |a_n|$, on a $\text{Rayon}(\sum a_n x^n) \leq \text{Rayon}(\frac{1}{2} \sum x^n) = 1$.

<u>Ccl</u>, $\text{Rayon}(\sum a_n x^n) = 1$.

<u>Théorème</u> : si pour n assez grand $|a_n| \leq |b_n|$ alors $\text{Rayon}(\sum a_n x^n) \geq \text{Rayon}(\sum b_n x^n)$

Utilisable ?
⇒ voir le <u>poly</u> !

(a) i) soit $x \in [0,1[$

on a $|R_n(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \cdot |f^{(n+1)}(t)| dt$

or $|f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{(n+1)!}{(t+1)^{n+2}} \leq (n+1)!$ d'après Q5(a)

D'où $|R_n(x)| \leq (n+1) \int_0^x (x-t)^n = \left[-(x-t)^{n+1} \right]_0^x = x^{n+1}$

or $x \in [0,1[$, on a $\lim_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$ et donc par encadrement.

$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

on a mq $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$

càd que la série $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ cv et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$

ii) soit $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$.

- on a $x+1 > 0$ et $x < 0$ donc $\frac{x}{x+1} < 0$
- on a $\frac{x}{x+1} + 1 = \frac{2x+1}{x+1} > 0$ car $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

d'où $\frac{x}{x+1} > -1$

faux mais à bien faire !

iii) soit $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$ → d'après $|\int_{[a,b]} f| \le \int_{[a,b]} |f|$

on a $|R_n(x)| \le \int_{\boxed{x}}^{\boxed{0}} \left| \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} \right| dt = \int_x^0 \frac{(t-x)^n \cdot |f^{(n+1)}(t)|}{n!} dt$

pour $t \in [x, 0]$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \underset{5a)}{\le} \frac{(n+1)!}{(t+1)^{n+2}} \le \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$

d'où $|R_n(x)| \le \frac{n+1}{(x+1)^{n+2}} \cdot \int_x^0 (t-x)^n dt = \frac{\left[(t-x)^{n+1}\right]_x^0}{(x+1)^{n+2}} = \frac{(-x)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}}$

on a $\frac{(-x)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}} = \frac{1}{x+1} \cdot \left(\frac{-x}{1+x}\right)^{n+1}$

d'après ii) on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{-x}{1+x}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{-x}{1+x} < \frac{1}{2}$

Ainsi, par comparaison, on a $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

puis en conclusion :

on a mq la série $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ cv et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$

Ccl : on a mq

$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

on a mq f est DSE !