SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans tout ce chapitre, p et n désigneront deux entiers supérieurs ou égaux à un, et I un intervalle réel contenant au moins deux réels.

1 Définition - exemples

définition 1: système différentiel

On appelle système différentiel linéaire d'ordre un à coefficients constants tout système du type :

$$\begin{cases} x_1'(t) & = a_{1,1}x_1(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \quad (E_1) \\ x_2'(t) & = a_{2,1}x_1(t) + \cdots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \quad (E_2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) & = a_{n,1}x_1(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \quad (E_n) \end{cases}$$

où :

- t désigne une variable réelle appartenant à un intervalle I
- $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont n^2 constantes réelles ou complexes données.
- $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont n fonctions continues données de $I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désignent n fonctions inconnues définies et dérivables sur I

Le système différentiel précédent peut s'écrire maitriciellement $\boxed{X'(t) = A.X(t) + B(t)}$ *en posant*

$$\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}} \quad \boxed{B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}} \quad \boxed{A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}}$$

remarque 1

Très souvent lorsque le système différentiel comportera deux ou trois fonctions inconnues, on les notera x et y (et z) plutôt que x_1 et x_2 (et x_3)

Ainsi le système de l'exemple 1 correspond au système $\begin{cases} x_1' & = -x_1 + 1 \\ x_2' & = -2x_2 + \operatorname{ch} t \end{cases}$

exemple 1: un premier cas très simple: système diagonal

On dit qu'un système différentiel est diagonal lorsque la matrice A est une matrice diagonale (ne pas confondre avec diagonalisable!). Dans ce cas, le système n'est rien d'autre qu'un ensemble d'équations différentielles indépendantes les unes des autres.

Exemple: $\begin{cases} x' = & -x + 1 \\ y' = & -2y + \operatorname{ch}(t) \end{cases}$

méthode 1: résolution d'un système triangulaire

Lorsque la matrice A est une matrice triangulaire supérieure on dit que le système différentiel est triangulaire. On commence par résoudre la dernière équation et on remonte progressivement.

Exemple:

Résoudre le système différentiel triangulaire suivant $\begin{cases} x_1' = & 2x_1 + x_2 + e^t \\ x_2' = & 2x_2 + x_3 \\ x_3' = & x_3 \end{cases}$

On devra trouver

$$\boxed{\exists (K,L,M) \in \mathbb{K}^3, \forall t \in \mathbb{R}, (x_1(t),x_2(t),x_3(t)) = (-e^t,0,0) + Ke^{2t}(1,0,0) + Le^{2t}(t,1,0) + Me^t(1,-1,1)}$$

exemple 2: un exemple avec une astuce

1. (a) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x_1' & = x_1 + 2x_2 + t \\ x_2' & = 2x_1 + x_2 - t \end{cases}$

   (b) Résoudre le même système avec la condition initiale $x_1(0) = x_2(0) = 0$

2. (a) Résoudre le système homogène suivant : $\begin{cases} x_1' & = x_1 + x_2 \\ x_2' & = 16x_1 + x_2 \end{cases}$

   (b) Résoudre le même système avec les conditions initiales $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 8$.
   Vous devez trouver $\forall t \in \mathbb{R}, (x_1(t),x_2(t)) = (e^{5t} - e^{-3t}, 4e^{5t} + 4e^{-3t})$

2 Interprétation graphique

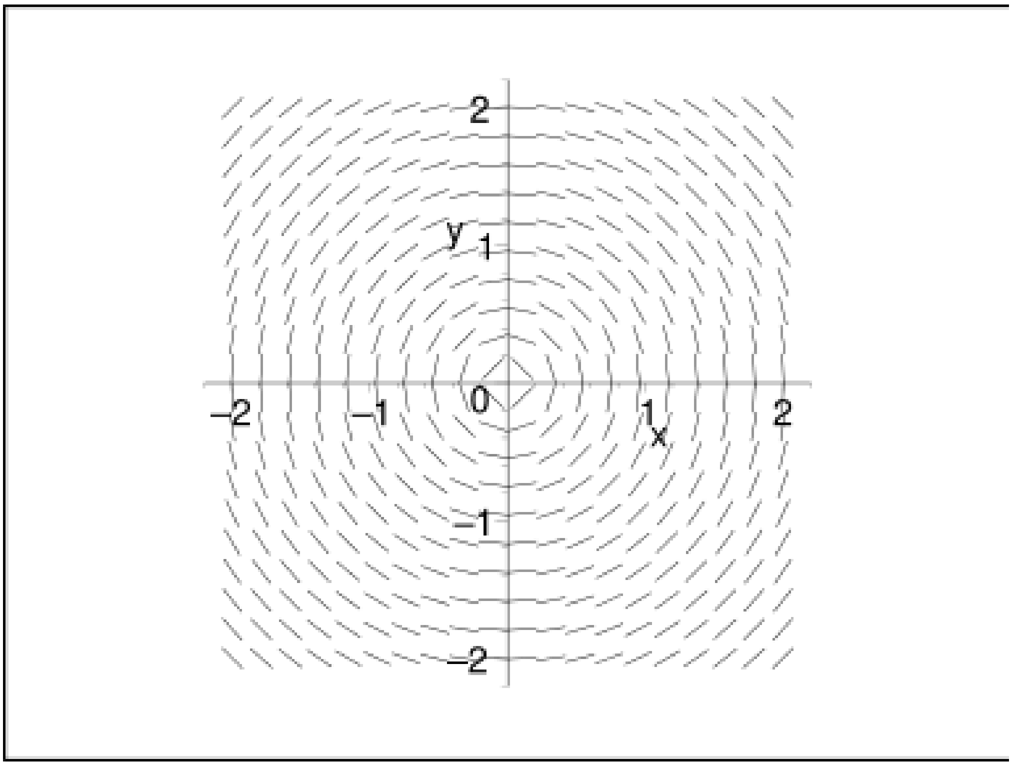
remarque 2 (*interprétation géométrique d'un système différentiel d'ordre deux*)

Soit (x,y) une solution d'un système différentiel d'ordre deux homogène,
c'est à dire que x et y sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) & = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) & = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$

- *considérons la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t),y(t)) = M(t)$*
- *pour un t fixé, si $(x'(t),y'(t)) \neq (0,0)$ on sait que cela signifie que $M(t)$ est un point régulier et donc que la tangente à la courbe au point $M(t)$ est dirigée par $(x'(t),y'(t))$*
- *Or ce vecteur est égal au vecteur*
  $(a_{11}x(t) + a_{12}y(t), a_{21}x(t) + a_{22}y(t)) = M'(t)$
  qui ne dépend donc que
  de la position du point!
  (et non pas de l'instant t
  pour lequel on est ce point)
- *On rappelle que l'on appelle **courbe intégrale** la représentation graphique de la solution d'une équation différentielle, ou d'un système différentiel.*
- *un système différentiel homogène étant donné, on peut donc préciser en tout point quelle sera la direction de la tangente à la courbe intégrale passant par ce point: en représentant un certain nombre de "petits vecteurs tangents" en plusieurs points, cela nous donne une idée de la géométrie des courbes intégrales.*
- *si le système différentiel comporte un second membre $(b_1(t),b_2(t))$ avec b_1 ou b_2 fonctions non constantes, on ne peut faire la même interprétation, car cette fois l'instant t pour lequel on est à la position $M(t)$ influe sur le vecteur directeur de la tangente.*
- *Pour un système différentielle homogène d'ordre trois, l'interprétation est analogue avec l'arc paramétré de l'espace $t \mapsto (x(t),y(t),z(t)) = M(t)$*

exemple 3:

Considèrons le système ldifférentiel $(S) = \begin{cases} x' = & -y \\ y' = & x \end{cases}$ avec $I = \mathbb{R}$



1. Montrer que si (x,y) est solution de (S) alors $\begin{cases} x'' + x & = 0 \\ y & = -x' \end{cases}$ (on justifiera que x'' existe)
2. En déduire la résolution de (S). Quelle est la nature des courbes intégrales?
3. Pouvait-on prévoir ce résultat dès le départ en considérant $xx' + yy'$?

méthode 2: résolution en résolvant une équation différentielle du second ordre

Après avoir justifié que l'on peut dériver x' et y', on détermine une équation différentielle su second ordre nécessairement vérifier par x [resp. par y]. On détermine la solution générale de cette équation différentielle. On en déduit ensuite une expression de y [resp. de x]. Et on vérifie que les fonctions trouvées sont effectivement solutions.

Cette méthode est applicable avec les systèmes homogènes ou non homogènes

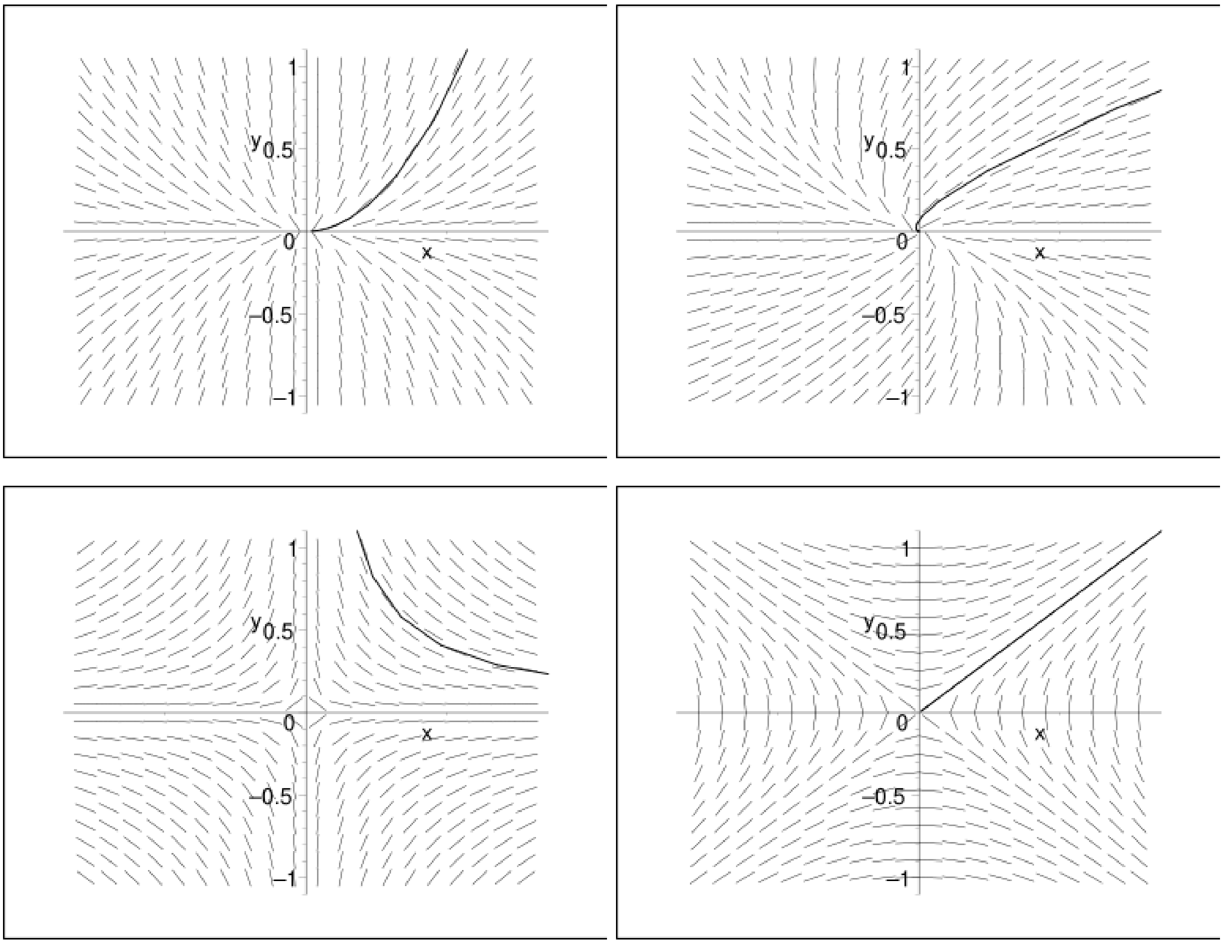
Exemple:

On s'intéresse au système $(S) = \begin{cases} x' = & \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ y' = & \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y \end{cases}$

1. *Justifier que les solutions sont des fonctions de classe C^2 au moins*
2. *Première méthode:*
   – *Déterminer une équation différentielle satisfaite par x, et la résoudre.*
   – *Obtenir un expression de y par simple dérivation*
   – *Conclure*
3. *Seconde méthode:*
   – *Déterminer une équation différentielle satisfaite par y, et la résoudre.*
   – *Même plan*

exemple 4:
On considère les systèmes différentiels

$$(S_1) = \begin{cases} x' = & -x \\ y' = & -2y \end{cases} \qquad (S_2) = \begin{cases} x' = & y \\ y' = & x \end{cases} \qquad (S_3) = \begin{cases} x' = & 2x+y \\ y' = & 2y \end{cases} \qquad (S_4) = \begin{cases} x' = & x \\ y' = & -y \end{cases}$$



1. Associer à chaque dessin le système différentiel correspondant
2. On s'intéresse au système (S_1)
   (a) Résoudre le système différentiel (on notera K [resp. L] la constante dans l'expression de x [resp. de y]
   (b) A quoi correspond la courbe intégrale pour $(K,L) = (0,0)$?
   (c) Même question pour $K = 0$ et $L \neq 0$. Puis pour $K \neq 0$ et $L = 0$
   Représenter ces courbes intégrales sur un dessin en les orientant
   Dans la suite on suppose que $K.L \neq 0$
   (d) Indiquer dans quelle zone du plan est située la courbe intégrale en fonction du signe de K et L
   (e) Montrer que la courbe intégrale est incluse dans une parabole dont on donnera l'équation. Toute la parabole est-elle décrite?
   (f) Dessiner quelques courbes intégrales en les orientant.
3. On s'intéresse au système (S_4)
   (a) Résoudre le système (S_4).
   Combien y a t il de solutions telles que $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ avec (x_0,y_0) fixé dans $\mathbb{R}^2$?
   (b) Intéressez-vous, comme ci-dessus, à la nature des courbes intégrales

3 Résultats théoriques

théorème 1: existence et unicité de la solution sur I du pb de Cauchy(admis)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in C^0(I,\mathbb{K}^n)$ et $X_0 \in \mathbb{K}^n$.
Alors, il existe une et une seule fonction X définie sur I et solution du système $X' = AX + B$ satisfaisant à la condition initiale $X(t_0) = X_0$
L'ensemble de définition sur lequel les solutions sont définies est l'ensemble de définition de la fonction B. Dans le cas particulier important où le système est homogène, l'ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$ tout entier.

Le théorème précédent fait irrésistiblement penser au théorème suivant déjà vu dans le chapitre sur les équations différentielles **scalaires**:

théorème 2: problème de Cauchy linéaire scalaire du premier ordre (rappel)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Soit a et b deux fonctions continues de $I \to \mathbb{K}$.
Alors : il existe une unique fonction f définie sur I telle que $\begin{cases} \forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\ \textbf{et } f(x_0) = y_0 \end{cases}$
c'est-à-dire qu'il existe une unique solution sur I de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ qui vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$

exemple 5:

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_3' &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$
avec la condition initiale suivante $x_1(\pi) = x_2(\pi) = x_3(\pi) = 0$

théorème 3: cas des systèmes homogènes

L'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ est un sev de dimension n de l'ensemble des fonctions de classe $C^1(\mathbb{R},\mathbb{K}^n)$

théorème 4: cas des systèmes avec second membre

La solution générale du système différentiel $X' = AX + B$ est égale à la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé $X' = AX$.
C'est à dire que si l'on note :

i) *X la solution générale du système $X' = AX + B$*
ii) *X_p une solution particulière du système $X' = AX + B$*
iii) *$\overline{X}$ la solution générale du système homogène $X' = AX$*

Alors, on a $\boxed{X = X_p + \overline{X}}$

exemple 6: on reprend l'exemple 1

On a vu que la solution générale est $X : t \mapsto \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$
Donner une base de l'ensemble des solutions du système homogène associé (on vérifiera que ces 3 fonctions constituent bien une famille libre)

4 Pratique de la résolution lorsque A est diagonalisable ou trigonalisable

4.1 Cas d'un système homogène

méthode 3: système homogène avec A diagonalisable ou trigonalisable

- On considère le syst. diff. homogène $X' = AX$ avec A est diagonalisable ou trigonalisable.
- Il existe donc une matrice inversible P et une matrice diagonale ou triangulaire supérieure T telle que $A = PTP^{-1}$.
- On effectue un changement de fonction inconnue en posant $Y = P^{-1}X$ (et donc $X = PY$)
- On montre que $\boxed{X' = AX \iff Y' = TY}$
- Le système différentiel $Y' = TY$ est alors simple à résoudre car c'est un système diagonal (si T est diagonale) ou au pire un système triangulaire (si T est triangulaire). On détermine alors la solution générale Y de ce système différentiel puis on trouve la solution générale X simplement en effectuant le produit PY.
- <u>on remarque avec joie que lorsque le système différentiel est homogène, sa résolution ne nécessite pas de calculer l'inverse de la matrice de passage P !</u>

exemple 7:

Résolvons le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

- On trouve que A est trigonalisable: A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- On montre que le syst. $X' = AX$ équivaut au syst. $Y' = TY$, soit $\begin{cases} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= y_2 \end{cases}$
- On trouve d'abord $y_2 : t \mapsto Ke^t$ puis $y_1 : t \mapsto (2Kt + L)e^t$.
  Ainsi la solution générale du système $Y' = TY$ est $Y : t \mapsto \begin{pmatrix} (2Kt + L)e^t \\ Ke^t \end{pmatrix}$
- La solution générale du système $X' = AX$ est $X = PY$, ce qui donne

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, X = (2Kt + L)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Ke^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2Kt + K + L)e^t \\ (2Kt + L + 2K)e^t \end{pmatrix} = Ke^t \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix} + Le^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ avec } (K,L) \in$$

théorème 5: $X' = AX$ avec A diagonalisable (HP depuis 2015, à savoir redémontrer)

(on peut alors écrire $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.)
Les solutions du sytème $X' = AX$ sont les fonctions

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto & P. \begin{pmatrix} K_1 \exp(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ K_n \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix} \end{array}} \text{ avec } (K_1, \ldots, K_n) \in \mathbb{K}^n \text{ constantes arbitraires}$$

on peut encore présenter le résultat précédent sous la forme :

$$X : t \mapsto K_1 \exp(\lambda_1 t) V_1 + \cdots + K_n \exp(\lambda_n t) V_n$$

où V_i représente le i-ème vecteur colonne de la matrice P .
(rappel: $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$).

4.2 Cas d'un système non homogène

On considère le système différentiel $X' = AX + B$ avec A diagonalisable ou trigonalisable.
Il y a deux manières de procéder:

1. si l'on connait une solution particulière, grâce au théorème 4, il suffit de la sommer avec la solution générale du système homogène associé.
2. si l'on ne connait pas de solution particulière, on va poser encore une fois le changement d'inconnue $Y = P^{-1}X$ mais cette fois le calcul de P^{-1} sera nécessaire :-((!

méthode 4: on connait une solution particulière

Il suffit d'ajouter une solution particulière à la solution générale du syst. diff. homogène associé.

Exemple:

On considère le système différentiel $\begin{cases} x' &= -x + y + t \\ y' &= -2x + 3y + 2t - 3 \end{cases}$.

- *Une solution particulière évidente est*
- *La solution générale du système homogène associé est*
- *La solution générale du système avec second membre est donc*

méthode 5: où on ne connait pas une solution particulière

- On considère le syst. diff. $X' = AX + B$ avec $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire ou même diagonale
- On pose $Y = P^{-1}X$, et on montre que le syst. équivaut à $Y' = TY + P^{-1}B$
- On détermine P^{-1} ainsi que $P^{-1}B$
- On résout le système triangulaire trouvée(on trouve Y)
- Puis on calcule $X = PY$

Exemple:

On considère le système différentiel $\begin{cases} x' &= -7x + 8y + 6\operatorname{ch} t + 10\operatorname{sh} t \\ y' &= -6x + 7y + 5\operatorname{ch} t + 9\operatorname{sh} t \end{cases}$

1. *Donner les matrices A et B. Montrer que A est diagonalisable et donner P et D.*
2. *On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que le système équivaut à $Y' = DY + P^{-1}B$.*
3. *Calculer P^{-1} puis $P^{-1}B$ et résoudre le système ci-dessus.*
4. *Conclure*

exemple 8:

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = & x(t) + y(t) + \cos(t) - \sin(t) \\ y'(t) = & -x(t) + 3y(t) + \sin(t) \end{cases}$

exemple 9:

Résoudre les systèmes différentiels :

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1' &= y_1 & + & e^{2t} \\ y_2' &= y_1 + y_2 & + & e^{-t} \\ y_3' &= y_1 + y_2 + y_3 & & \end{cases}$$

5 Equivalence entre une équation scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre un

5.1 cas général

- Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n réels et b une fonction continue sur un intervalle I.
- On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre n $\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b \quad (E_n)}$.
- On note $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$.
- Avec ces notations on a $\boxed{(E_n) \iff X' = AX + B}$
- On peut alors résoudre ce système différentiel avec les méthodes précédentes: on obtiendra la solution générale de (E_n) !

exemple 10: Matrices compagnons

On considère la matrice A ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A
2. Soit λ une valeur propre de A.
   Montrer que E_λ est une droite vectorielle et donner un vecteur propre associé.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1 X + a_0$$

   la matrice A est-elle diagonalisable?

exemple 11:

Résoudre l'équation différentielle $x^{(4)} - x^{(3)} - 7x^{(2)} + x' + 6x = 0$ en introduisant un système différentiel judicieux!

5.2 cas particulier des équations homogènes du second ordre à coefficients constants

Soient α et β deux constantes réelles. On considère l'équation différentielle du second ordre $\boxed{x'' + \alpha x' + \beta x = 0 (EH2)}$.
Nous allons utiliser les résultats matriciels vus ci-dessus pour retrouver les résultats bien connus (!) de première année. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}}$.

L'équation différentielle linéaire homogène du second ordre équivaut au système différentiel linéaire homogène du premier ordre $\boxed{X' = AX.}$
On a $\chi_A(X) = X^2 + \alpha X + \beta$. Notons Δ le discriminant du trinôme $X^2 + \alpha X + \beta$

- si $\Delta > 0$. on note λ_1 et λ_2 les deux racines distinctes.
  A est diagonalisable, semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. On a alors $\boxed{X(t) = K_1.e^{\lambda_1 t}.V_1 + K_2.e^{\lambda_2 t}.V_2}$
- si $\Delta = 0$. on note λ la racine double.
  A est trigonalisable, semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On a alors $\boxed{X(t) = K_1.e^{\lambda t}.V_1 + K_2.te^{\lambda t}.V_2}$
- si $\Delta < 0$. on note λ et $\overline{\lambda}$ les deux racines complexes conjuguées.
  A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, semblable à la matrice complexe $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$. On a alors $\boxed{X(t) = K.e^{\lambda t}V_1 + \overline{K}.e^{\overline{\lambda} t}\overline{V_1}}$

Ensuite, comme $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, pour retrouver les résultats de sup, il suffit de regarder la première composante de chacune des solutions $X(t)$ trouvées !

exemple 12: 'démonstration' du résultat précédent sur un exemple

On s'intéresse aux solutions réelles de l'équation différentielle $x'' + 4x = 0 \quad (E)$

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

1. Donner la matrice A tel que $X' = AX \iff (E)$
2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et donner les matrices P et D.
3. En déduire la solution générale du syst. diff. $X' = AX$,
4. En déduire les solutions réelles de (E)

6 Comportement asymptotique des solutions

remarque 3

- *Dans le cas où A est diagonalisable, les solutions sont de la forme*

$$X(t) = K_1 \exp(\lambda_1 t)V_1 + \cdots + K_n \exp(\lambda_n t)V_n$$

  où $(V_1, \ldots, V_n)$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
- *On utilise la forme algébrique des complexes : $\lambda_k = a_k + ib_k$*
  alors $\exp(\lambda_k t) = \exp(a_k t) * \exp(ib_k t)$ et $|\exp(ib_k t)| = 1$.
- *si $a_k < 0$ alors quand $t \to +\infty$, $\exp(\lambda_k t) \to 0$*
  donc le vecteur V_k "contribue peu" dans la valeur de $X(t)$.
- *Inversement si $a_k > 0$ alors quand $t \to +\infty$, $\exp(\lambda_k t) \to +\infty$ donc*
  le vecteur V_k "contribue pour beaucoup" dans la valeur de $X(t)$
- *A noter que le signe $\approx$ n'est pas le symbole $\sim$!*
  (il signifie juste ce qui est indiqué plus haut)

théorème 6:

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant toutes ses valeurs propres avec une partie réelle strictement négative.

Alors toute solution du système différentiel homogène $X' = AX$ vérifie $\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$

7 Annexe: 'dérivée de matrices'

définition 2: matrice de classe C^k

Soit (m_{ij}) un ensemble de $n \times p$ fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de classe C^k sur I lorsque chacune de ses fonctions-coefficients (fonctions coordonnées) $m_{i,j}$ est de classe C^k sur I.

exemple 13:

- la matrice $M = M(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \cos t \\ -\sin t & 3t^2 \end{pmatrix}$ est une matrice de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
- la matrice $M = M(t) = \begin{pmatrix} |t| \\ \tan t \end{pmatrix}$ est de classe C^0 sur $]-\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}[$

définition 3: 'dérivée d'une matrice'

Soit $A = (m_{i,j})$ une matrice de classe C^1 sur I.
On appelle dérivée de M, et on note M', la matrice de coefficient général $(m'_{i,j})$

remarque 4

1. *on dit que* $\boxed{\lim_{t \to t_0} M(t) = N}$ *lorsque* $\boxed{\text{pour tout } i \text{ et tout } j\text{, on a } \lim_{t \to t_0} m_{i,j}(t) = n_{i,j}}$
2. *avec cette définition, on a donc* $\boxed{\lim_{h \to 0} \dfrac{M(t_0+h) - M(t_0)}{h} = M'(t_0)}$

exemple 14:

Soit $M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

M est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :$\forall t \in \mathbb{R}$, $M'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = M(t + \frac{\pi}{2})$

Par une récurrence immédiate, on a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^{(k)}(t) = M(t + k\frac{\pi}{2})$

exemple 15:

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $M^{(3)} = 0$. Que dire de M ?

théorème 7: dérivée d'un produit matriciel

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices de classe C^1, alors :

i. MN est une matrice de classe C^1 et l'on a la formule $\boxed{(MN)' = M'N + MN'}$ (et l'ordre compte !)

ii. dans le cas où M est une matrice constante, on a $\boxed{(MN)' = MN'}$

D'après vous, la formule de Leibniz est-elle valable pour le produit matriciel ?

exemple 16:

α est un réel fixé.

On s'intéresse aux solutions réelles du système différentiel $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Résoudre ce système en posant $z = x + i.y$.
(Question: comment passe-t-on de $M(z(t))$ à $M(z(t+h))$?)