Réduction des coniques
avec un terme croisé

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

définition : dêfinition de 'conique' à notre programme (rappel)

On appelle conique, ou courbe du second degré, toute courbe Γ qui possède une équation du type

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

où (a,b,c,d,e,f) sont des constantes réelles avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

La question qui se pose est la question dite de **la réduction de la conique**:

Il s'agit à partir d'une équation du seconde degré de donner la nature de la conique.

Suivant que le terme dit croisé xy est présent ou pas, on procédera de manières différentes:

1. pas de terme en xy? Une simple translation de l'origine du repère suffit pour conclure: la méthode employée est celle de la mise sous forme canonique.
2. présence du terme en xy? Une rotation du repère avec éventuellement un changement d'origine est nécessaire: la méthode employée est celle de la réduction des matrices, et éventuellement de la mise sous forme canonique

---

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{(E)}}$ dans le repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j})$

Ecriture de l'équation sous forme matricielle

On pose

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$$

En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a

$${}^tU.A.U = ax^2 + 2bxy + xy^2 \qquad \text{et} \qquad L.U = dx + ey$$

Ainsi l'équation (E) s'écrit ${}^tU.A.U + L.U + f = 0$

remarque 1

La matrice A est une matrice symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonal (théorème spectral)

exemple :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $2x^2+4xy-y^2+3x-2y+5=0$
Ecrire cette équation à l'aide de matrices.

Réduction

Comme A est une matrice symétrique à coefficients réels d'après le théorème spectral

$$\exists P \in O_2(\mathbb{R}), \exists\,(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2, A = P.D.P^{-1} \qquad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Notons $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ les vecteurs colonnes de P.

On sait que P est la matrice de passage de la base orthonormée $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ à la base orthonormée $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$

On a noté (x,y) les coordonnées dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Notons (X,Y) les coordonnées dans le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

On sait que l'on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ càd $U = P.V$
On a alors

ce qui prouve que l'équation de $\mathcal{C}$ dans $(O,\vec{I},\vec{J})$ est ${}^tV.D.V + L.P.V + f = 0$ càd $\lambda_1.X^2 + \lambda_2.Y^2 + L.P.V + f = 0$

A RETENIR: "les vecteurs propres de A donnent la direction des axes de la conique"

exemple :

Soit $\mathcal{C}$ d'équation (E) : $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 6 = 0$ *dans le repère* $(0,\vec{i},\vec{j})$.

- On note $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $L = (-2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2})$ ainsi que $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- l'égalité (E) s'écrit alors ${}^tUAU + LU - 6 = 0$
- Une recherche d'éléments propres donne $A = PD{}^tP$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
- Notons $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et $\vec{J} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.
  On note (X,Y) les coordonnées dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$,
  On pose $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
  - On a $U = P.V$
  - et ${}^tUAU ={}^t (PV)A(PV) ={}^t V({}^tPAP)V ={}^t VDV$
  - et $LU = LPV = (-4 \quad 0)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -4X$ et ${}^tVDV = 2X^2 + 8Y^2$
- Notons $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et $\vec{J} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

  $\mathcal{C}$ a pour équation dans $(O,\vec{I},\vec{J})$: ${}^tV.D.V + L.P.V - 6 = 0$

  avec ${}^tV.D.V = 2X^2 + 8Y^2$ (sans calcul)

  et $L.P = (-2\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2})\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = (-4 \quad 0)$ d'où $LPV = (-4 \quad 0)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -4X$

  Dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J})$

  $$\mathcal{C} \text{ a donc pour équation } 2X^2 + 8Y^2 - 4X - 6 = 0, \text{ soit } \boxed{X^2 + 4Y^2 - 2X - 3 = 0}$$
- Dans ce nouveau repère, l'équation cartésienne n'a plus le terme croisé: on procède alors par mise sous forme canonique!

  $$X^2 - 2X - 3 = (X-1)^2 - 1 - 3 = (X-1)^2 - 4$$

  d'où l'équation de $\mathcal{C}$ dans $(O,\vec{I},\vec{J})$ est

  $$(X-1)^2 + 4Y^2 = 4 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{(X-1)^2}{4} + Y^2 = 1}$$
- Considérons le point Ω de coordonnées $(1,0)$ dans $(O,\vec{I},\vec{J})$.
  Plaçons nous dans le repère $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$, et notons (X_1,Y_1) les coordonnées dans ce repère.

  Γ a pour équation dans ce repère $\boxed{\frac{X_1^2}{4} + Y_1^2 = 1}$.

  On reconnait l'équation réduite d'une ellipse.
  - le centre de symétrie est le point Ω:

    ses coordonnées dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ sont donnés par ${}^tP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
  - le grand axe est la droite qui passe par Ω est dirigée par $\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$
  - le grand axe est la droite qui passe par Ω est dirigée par $\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$

Résumé de la méthode

$\mathcal{C}$ désigne la courbe d'équation $\boxed{ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (E) \text{ dans } (0,\vec{i},\vec{j})}$

- J'écris les matrices $U=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad L=\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$

  Dans $(0,\vec{i},\vec{j})$, l'équation s'écrit $\boxed{{}^tU.A.U+L.V+f=0}$

- Je diagonalise A sous la forme $P.D.P^{-1}$ avec $P \in O_2(\mathbb{R})$

- Je note $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ les vecteurs colonnes de P. $\qquad (\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ **est une bon de** $\mathbb{R}^2$

  "les vecteurs propres de A donnent la direction des axes de la conique"

- Je me place dans le nouveau repère $(O,\vec{I},\vec{J})$

  Dans ce repère, les coordonnées sont notées (X,Y) et je pose $V=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et l'on a $U=P.V$

  L'équation dans le nouveau repère est $\boxed{{}^tV.D.V+L.P.V+f=0}$ càd $\boxed{\lambda_1.X^2+\lambda_2.Y^2+L.P.V+f=0}$

---

remarque: genre d'une conique (HP)

On a $\det(A)=\lambda_1\lambda_2$ et donc le signe de $\det A$ nous donne un renseignement sur le signe des valeurs propres.

On dit que la conique $\mathcal{C}$ est :

- **du genre hyperbole** lorsque $\det A<0$
  Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est un hyperbole
- **du genre parabole** lorsque $\det A=0$
  Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est un parabole
- **du genre ellipse** lorsque $\det A>0$
  Dans ce cas, si la conique n'est pas dégénérée, c'est un ellipse