INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Dans ce chapitre, nous allons définir une fonction g en posant

$$\boxed{g(x) = \int_J f(x,t)dt}$$

où $f : I \times J \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables définie sur le produit cartésien de deux intervalles.

L'ensemble de définition de g est l'ensemble des $x \in I$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_J f(x,t)dt$ existe.

Plus précisément:

1. si l'intégrale est généralisée, c'est l'ensemble des $x \in I$ tels que l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ converge.
2. si l'intégrale n'est pas généralisée(c'est à dire si J est un segment et si $t \mapsto f(x,t)$ est continue), c'est l'ensemble I.

𝄞 exemple 1:

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui relèvent de ce chapitre.
Puis, pour chacune de celles-ci, déterminer leurs ensembles de définition

$$g_1 : x \mapsto \int_2^x \cos(t^2)dt \qquad g_2 : x \mapsto \int_0^1 \cos(x.t^2)dt \qquad g_3 : x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-x.t^2}dt$$

$$g_4 : x \mapsto \int_0^x \cos(x.t^2)dt \qquad g_5 : x \mapsto \int_{-x}^{x^2} \cos(t^2)dt \qquad g_6 : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^x.\sqrt{1-t}}$$

𝄞 exemple 2:

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles pour lesquelles on peut

i) directement affirmer qu'elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leurs dérivées.
ii) facilement justifier qu'elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leurs dérivées.
iii) rien dire... pour le moment!

$$g_1 : x \mapsto \int_2^x \cos(t^2)dt \qquad g_2 : x \mapsto \int_0^1 \cos(x.t^2)dt \qquad g_3 : x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-x.t^2}dt$$

$$g_4 : x \mapsto \int_{2x}^4 \cos(t^2)dt \qquad g_5 : x \mapsto \int_{-x}^{x^2} \cos(t^2)dt \qquad g_6 : x \mapsto \int_0^x \cos(x.t^2)dt$$

𝄞 exemple 3: Etonnant non?

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{t^{x+1}} dt$.

Montrer que la fonction g est bien définie sur $[0, +\infty[$ mais qu'elle n'y est par continue!

1 Les deux théorèmes de ce chapitre

𝄢 théorème 1: théorème de continuité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}}$ une fonction telle que:

i) à $t \in J$ fixé, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue sur I

ii) à $x \in I$ fixé, la fonction $t \to f(x,t)$ est continue sur J

iii) il existe une fonction φ continue et intégrable sur J, telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors :

la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est définie et continue sur I

remarques:

i) *on dit aussi que f est continue par rapport à t*

ii) *on dit encore que f est continue par rapport à x*

iii) *on a vu, dans le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables, qu'une fonction pouvait être continue par rapport à chacune de ses variables sans qu'elle soit continue*

Le théorème dit que sous certaines conditions on a: $\lim\limits_{x \to x_0} \int_J f(x,t)dt = \int_J f(x_0,t)dt = \int_J \lim\limits_{x \to x_0} f(x,t)dt$
(il s'agit donc d'un théorème qui justifie une interversion...)

𝄞 exemple 4:

Justifier que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x.t^2).dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

𝄞 exemple 5:

Justifier que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}.dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

théorème 2: théorème de dérivation sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}}$ une fonction telle que:

i) à $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J

ii) à $t \in J$ fixé, la fonction $x \to f(x,t)$ est de classe C^1 sur I

iii) à $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J

iv) il existe une fonction φ continue et intégrable sur J, telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)}$$

Alors :

la fonction $\boxed{g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt}$ est définie et de classe C^1 sur I, et l'on a

$$\boxed{\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt}$$

Cette formule s'appelle <u>la formule de Leibiniz</u>,

Le théorème dit que sous certaines conditions on a: $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_J f(x,t)dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

(il s'agit donc d'un théorème qui justifie une interversion...)

exemple 6:

Justifier que la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \arctan(xt).dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, puis donner explicitement $g'(x)$

exemple 7:

Justifier que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} \arctan(xt).e^{-t}.dt$ est C^1.

2 Résultats annexes

définition 1: continuité, dérivabilité sur un intervalle (rappel)

On dit qu'une fonction g est *continue [dérivable, C^1] sur l'intervalle I*
lorsqu'elle est *continue [dérivable, C^1] en tout point $x_0 \in I$*
La continuité et la dérivabilité sont des propriétés <u>locales</u>

théorème 3:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Il y a équivalence entre:

i) g est continue [dérivable, C^1] sur l'intervalle I

ii) g est continue [dérivable, C^1] sur tout segment inclus dans I

démonstration pour la continuité:

- $\boxed{ii) \Rightarrow i)}$: *On suppose que g est continue sur tout segment inclus dans I.*
  Nous allons montrer que g est continue sur I.
  Pour cela, nous allons montrer que g est continue en tout point de I.
  Soit $x_0 \in I$ fixé.
  Il existe un segment K inclus dans I tel que $x_0 \in K$.
  Or par hypothèse, g est continue sur K, c'est à dire est continue en tout point de K;
  donc en particulier, on peut affirmer que g est continue en x_0.
  On a bien justifié que g est continue en tout point de I
- $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$: *Il s'agit du sens trivial.*
  Si g est continue sur I alors f est a fortiori continue sur tout intervalle inclus dans I.

exemple 8:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
A-t-on l'équivalence entre:

i) g est bornée sur l'intervalle I

ii) g est bornée sur tout segment inclus dans I

théorème 4: théorème vu dans le chapitre fxs plusieurs variables

Si f est continue sur un domaine fermé borné de $\mathbb{R}^2$ alors f est bornée sur ce domaine.
En particulier, si f est continue sur le produit cartésien de segment $[a,b] \times [c,d]$ alors f est bornée c'est à dire $\exists M > 0, \forall (x,t) \in [a,b] \times [c,d], |f(x,t)| \leqslant M$

exemple 9:

Soient $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$.
De deux manières différentes, prouver que la fonction $f : (x,t) \mapsto xt$ est bornée sur $[a,b] \times [c,d]$

méthode 1: lorsque l'hyp. de dom est difficile à établir sur I tout entier

On justifie que g est C^0 $[C^1]$ sur tout segment inclus dans I,
puis l'on écrit

$$g \text{ est } C^0 \ [C^1] \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ inclus dans } I \text{ donc } g \text{ est } C^0 \ [C^1] \text{ sur } \bigcup_{[a,b]\subset I} [a,b] = I$$

𝄞 exemple 10: avec une intégrale généralisée

Soit $g(x) = \int_0^{\infty} \exp(-xt) \arctan t \, dt$
Montrons que g *est continue sur* $]0, +\infty[$

Pour cela on note $\boxed{\begin{array}{rcl} f :]0,+\infty[\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \exp(-xt)\arctan t \end{array}}$

Nous allons montrer que g est continue sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. (on a donc $a > 0$.)

i) à $t \in]0, +\infty[$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
ii) à $x \in]0, +\infty[$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
iii) Pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0, +\infty[$, on a $|f(x,t)| \leqslant e^{-at}.\frac{\pi}{2} \overbrace{=}^{\text{def.}} \varphi(t)$
et la fonction φ est bien continue et intégrable sur $]0, +\infty[$
car par théorème $\int_0^{\infty} e^{-at}dt$ converge lorsque $a > 0$

D'après **le théorème de continuité sous le signe $\int$**, on peut affirmer que g est C^0 sur le segment $[a,b]$.

Comme g *est* C^0 *sur tout segment* $[a,b]$ *inclus dans* $]0,+\infty[$ *alors* g est C^0 sur $\bigcup\limits_{[a,b]\subset]0,+\infty[} [a,b] =]0,\infty[$

𝄞 exemple 11: avec une intégrale non généralisée - version I

On pose $g(x) = \int_0^1 e^{xt^2}\, dt$.
Montrer que g *est continue sur* $\mathbb{R}$

Pour cela on note $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{xt^2} \end{array}}$

Nous allons montrer que g est continue sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$.

i) à $t \in [0,1]$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
ii) à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
iii) en notant $\varphi : t \mapsto e^{bt^2}$
on a pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [0,1], |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$
et la fonction φ est bien continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment!

D'après **le théorème de continuité sous le signe $\int$**, on peut affirmer que g est C^0 sur le segment $[a,b]$.

Comme g *est* C^0 *sur tout segment* $[a,b]$ *inclus dans* $\mathbb{R}$ alors g est C^0 sur $\bigcup\limits_{[a,b]\subset\mathbb{R}} [a,b] = \mathbb{R}$

𝄞 exemple 12: avec une intégrale non généralisée - version II

On pose $g(x) = \int_0^1 e^{xt^2}\,dt$.
Montrer que g *est continue sur* $\mathbb{R}$

Pour cela on note $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{xt^2} \end{array}}$

Nous allons montrer que g est continue sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$.

i) à $t \in [0,1]$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

ii) à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.

iii) **la fonction f étant continue sur le domaine fermé et borné** $[a,b]\times[0,1]$, on sait par théorème qu'elle est bornée; c'est à dire

$$\exists M>0, \forall (x,t)\in[a,b]\times[c,d], |f(x,t)| \leqslant M \overbrace{=}^{\text{def.}} \varphi(t)$$

et la fonction φ est bien continue et intégrable sur $[0,1]$
(car c'est une fonction constante sur un segment)

D'après **le théorème de continuité sous le signe $\int$**, on peut affirmer que g est C^0 sur le segment $[a,b]$.

Comme g est C^0 sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ alors g est C^0 sur $\bigcup\limits_{[a,b]\subset\mathbb{R}} [a,b] = \mathbb{R}$

Questions subsidiaires:

1. Peut-on calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{xt^2}\,dt$?
2. Peut-on déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^1 e^{xt^2}\,dt$?
3. Peut-on déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\int_0^1 e^{xt^2}\,dt$?

remarque importante:
cette manière de procéder peut être appliquée à chaque fois que l'intégrale n'est pas généralisée! A retenir donc!

par exemple avec $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(tx)}{\sqrt{2-t}}dt$ mais pas avec $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^2 \frac{\cos(tx)}{\sqrt{2-t}}dt$