INTEGRALES GENERALISEES
INTEGRALES IMPROPRES

Table des matières

- Dans tout ce résumé, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
- On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.
- **En intégration, la notion de segment est fondamental.**

- *Dans ce polycopié, nous allons donner un sens à des intégrales de fonctions qui ne seront pas continues sur un segment.*

théorème 1: c'est le théorème 3 du premier poly d'intégration :-)

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors:

i) l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$ existe, càd $\displaystyle\int_a^b f$ existe.

ii) et l'on a $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive quelconque de f sur $[a,b]$

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment existe toujours. on dira encore qu'
"une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment".

1 Définition, exemples (V072)

définition 1: intégrale généralisée en sa borne supérieure

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit f une fonction continue de $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. On dit que *l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est convergente* lorsque la fonction F définie par $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures

   Si tel est le cas, on note $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x)}$
2. Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale divergente.
3. On dit que *l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente* ou encore que f *est intégrable sur l'intervalle* $[a,b[$ lorsque $\int_a^b |f(t)dt|$ est une intégrale convergente.

remarque: comme pour les séries numériques, la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *désigne "le problème" et, dans le cas de convergence, la valeur de l'intégrale, c'est à dire un nombre réel ou complexe.*

interprétation graphique

exemple 1: déterminer la nature d'une intégrale à l'aide de la définition

Nature et éventuellement calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{2+3t^2}$

- *La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{2+3t^2}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$;

  on peut affirmer par théorème que f *possède des primitives sur* $[0, +\infty[$

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{2+3t^2}$ *est donc généralisée en sa borne supérieure uniquement*

- *Soit* $x \geqslant 0$. *On a*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{2+3t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

  On effectue le changement de variable $u = \dfrac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}}$ *(et donc* $du = \dfrac{\sqrt{3}dt}{\sqrt{2}}$*), cela donne*

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\arctan u\right]_0^{\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}})$$

  D'où trivialement $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$. *(limite finie)*

  On peut ainsi dire que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{2+3t^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2\sqrt{6}}}$.

  On écrit $\boxed{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{2+3t^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}}$

exemple 2: déterminer la nature d'une intégrale à l'aide de la définition

Nature et éventuellement calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$

- *La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ *est continue sur* $[0,1[$;

  on peut affirmer par théorème que f *possède des primitives sur* $[0,1[$

  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ *est donc généralisée en sa borne supérieure uniquement*

- *Soit* $x \in [0,1[$

  On a

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{t-1} = [\ln|t-1|]_0^x = \ln(1-x)$$

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$,

  on a montré que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ *est une intègrale divergente*

définition 2: intégrale généralisée en sa borne inférieure

Soit $]a,b]$ un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Soit f une fonction continue de $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. On dit que *l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est convergente* lorsque la fonction F définie par $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures

   Si tel est le cas, on note $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} F(x)}$
2. Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale divergente.
3. On dit que *l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente* ou encore que f *est intégrable sur l'intervalle* $]a,b]$ lorsque $\int_a^b |f(t)dt|$ est une intégrale convergente.

exemple 3: déterminer la nature d'une intégrale à l'aide de la définition

Nature et éventuellement calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \cos(t)dt$

- *La fonction* $\cos$ *est continue sur* $]-\infty,0]$

  L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \cos(t)dt$ *est donc généralisée en sa borne inférieure uniquement*
- *Soit* $x \leqslant 0$

  On a $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^0 \cos(t)dt = [\sin(t)]_x^0 = -\sin(x)$ *Comme* F *ne possède pas de limite en* $-\infty$, *on a montré que* $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \cos(t)dt$ *est une intégrale divergente.*

2 Intégrale faussement généralisée (V073)

définition 3: fonction prolongeable par continuité

Soit I un intervalle, et x_0 un élément de I ou une borne **finie** de I.
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I - \{x_0\}$.
On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 lorsque $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x)$ **existe et est finie**

La fonction ainsi prolongée est la fonction $\overline{f} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l = \displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$

La fonction $\overline{f}$ *est alors une fonction continue sur* I.

rem: Très souvent, l'énoncé dit que "l'on appellera encore f *la fonction ainsi prolongée"*

rem: on ne dit jamais qu'une fonction est prolongeable par continuité en $+\infty$ *ou en* $-\infty$

exemple 4: fonction prolongeable en un point intérieur de l'intervalle

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est une fonction dèfinie et continue sur $\mathbb{R}^*$
- On sait $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ (limite finie)
  On peut donc affirmer que *la fonction f est prolongeable par continuitè en* 0
- La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} \overline{f} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{array}}$ est maintenant une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

exemple 5: fonction prolongeable en une borne de l'intervalle

- La fonction $\begin{array}{rcl} f :]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t.\ln t \end{array}$ est une fonction dèfinie et continue sur $]0,1]$
- On sait que $\lim\limits_{t \to 0^+} t.\ln t = 0$ (limite finie)
  On peut donc affirmer que f *est prolongeable par continuité en* 0
- La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} t.\ln t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } = 0 \end{cases} \end{array}}$ est maintenant une fonction continue sur $[0,1]$

définition 4: intégrale faussement généralisée en sa borne supérieure

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ avec a et b **bornes finies**.
Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$)

On dit que *l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est faussement généralisée en b* lorsque f est prolongeable par continuité en b, c'est à dire $\lim\limits_{t \to b^-} f(t)$ existe et est finie

exemple 6:

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}.\ln t.dt$

- *La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t}.\ln t$ est continue sur* $]0,1]$.
  L'intégrale I est donc généralisée en sa borne inférieure uniquement.
- *On a $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 0$ d'après le théorème des croissances comparées.*
  Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0
- *On a prouvé que l'intégrale I était une intégralement faussement généralisée.*

exemple 7:

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t} - e^2}{t-1} dt$

- *La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{e^{2t} - e^2}{t-1}$ *est continue sur* $[0,1[$.
  (quotient de fonction continue, le dénominateur ne s'annulant pas)
  L'intégrale I *est donc généralisée en sa borne supérieure uniquement.*

- *On remarque que l'on peut facilement trouver* $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t)$.
  En effet, la fonction $g : t \mapsto e^{2t}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et l'on a* $g'(t) = 2.e^{2t}$
  Ainsi,
  $$\lim_{t \to 1^-} \frac{e^{2t} - e^2}{t-1} = \lim_{t \to 1^-} \frac{g(t) - g(1)}{t-1} = g'(1) = 2.e^2$$

- *On vient de prouver que la fonction* f *est prolongeable par continuité en* 1,
  et ainsi que l'intégrale I *est faussement généralisée en* 1

définition 5: intégrale faussement généralisée en sa borne inférieure

Soit $]a,b]$ un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ avec a et b **bornes finies**.
Soit f une fonction continue sur $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$)

On dit que *l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est faussement généralisée en* a lorsque f est prolongeable par continuité en a, c'est à dire $\lim\limits_{t \to a^+} f(t)$ existe et est finie

3 Des remarques bien utiles (V074)

exemple 8: retour sur le premier exemple

Nous avons vu que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{2+3t^2}$ *était convergente.*
Que pouvez-vous dire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{5.dt}{2+3t^2}$?
Grâce au théorème ci-dessous, on peut dire que cette intégrale est convergente et que sa valeur est $\dfrac{5\pi}{2\sqrt{6}}$

théorème 2: produit d'une intégrale généralisée par un scalaire non nul

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f une fonction définie et continue de $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$).
Soit λ un scalaire non nul fixé .

1. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b \lambda f(t)dt$ converge, et l'on a

$$\boxed{\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt}$$

2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b \lambda f(t)dt$ diverge

"multiplier l'intégrande par un scalaire non nul ne change pas la nature de l'intégrale"

démonstration

- Notons $h = \lambda.f$
- Comme les fonctions f et h sont continues sur $[a,b[$, elles admettent des primitives sur cet intervalle.

  Pour tout $x \in [a,b[$ on note $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$
- On a par linéarité de l'intégrale (de sup!) pour tout $x \in [a,b[$

$$H(x) = \int_a^x \lambda h(t)dt = \int_a^x \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^x f(t)dt = \lambda F(x)$$

- **Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ converge**

  Par définition, ceci signifie que la fonction F possède une limite finie l lorsque $x \to b^-$.

  On a donc $\lim\limits_{x \to b^-} H(x) = \lim\limits_{x \to b^-} \lambda.F(x) = \lambda.l$ (limite finie)

  Ceci prouve que $\int_a^b \lambda f(t)dt$ est une intégrale CV, et que l'on a

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lim_{x \to b^-} H(x) = \lambda.l = \lambda.\int_a^b f(t)dt$$

- **Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ diverge**

  Ceci signifie que la fonction F ne posssède pas de limite finie en b^-.

  Comme $H = \lambda.F$ avec $\lambda \neq 0$, les théorèmes généraux sur les limites indiquent que H ne peut posséder de limite finie en b^-.
  Ce qui signifie que $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt$ est une intégrale DV.

théorème 3: conséquence directe des théorèmes généraux sur les limites

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t)dt$ diverge
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t)dt$ converge,
   et l'on a
$$\boxed{\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt}$$
3. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge alors on ne peut conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t)$

démonstration

- Notons $h = f + g$
- Comme les fonctions f, g et h sont continues sur $[a,b[$,
  elles admettent des primitives sur cet intervalle.

Pour tout $x \in [a,b[$ on note

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad G(x) = \int_a^x g(t)dt \qquad H(x) = \int_a^x h(t)dt$$

- On a par linéarité de l'intégrale (de sup!) pour tout $x \in [a,b[$

$$H(x) = \int_a^x f(t) + g(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt = F(x) + G(x)$$

- Les théorèmes généraux sur les limites donnent alors directement les résultats du théorème.

Plus précisément dans le cas où F et G possèdent des limites finies en b^-
On a alors H qui admet une limite finie en b^-
(et ceci prouve déjà que l'intégrale $\int_a^b h(t)dt$ est convergente)
et l'on a

$$\int_a^b h(t)dt = \lim_{x \to b^-} H(x) = \lim_{x \to b^-} F(x) + G(x) = \lim_{x \to b^-} F(x) + \lim_{x \to b^-} G(x) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

exemple 9: deuxième retour sur le premier exemple

Nous avons vu que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dt}{2+3t^2}$ *était convergente.*
Que pouvez-vous dire de l'intégrale $\int_5^\infty \frac{dt}{2+3t^2}$? Et de $\int_{-3}^\infty \frac{dt}{2+3t^2}$?

théorème 4: évident mais pratique!

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit f une fonction continue de $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $c \in [a,b[$
Alors : $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature.

le problème de la convergence d'une intégrale est une propriété locale : c'est le comportement de la fonction au voisinage de b, et uniquement au voisinage de b, qui va déterminer la nature de l'intégrale généralisée.
Cette remarque est à rapprocher de celle vue sur les séries numériques:
la nature d'un série n'est pas changée si on en modifie un nombre fini de termes

4 Intégrales de référence (V075)

théorème 5: une intégrale de référence

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale convergente.

démonstration

- La fonction ln est continue sur]0,1], l'intégrale est généralisée en 0.

- Soit $x > 0$.
  On a
  $$F(x) = \int_x^1 \ln(t)dt = [t.\ln t]_x^1 - \int_x^1 dt = -x\ln x - 1 + x$$
  D'après le théorème des croissances comparées, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$

  On a ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -1$ (limite finie).

  On a prouvé que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge (et vaut -1)

- remarque: en prouvant ceci, on a aussi prouvé que la convergence des intégrales suivantes: $\int_0^1 3\ln(t)dt$, $\int_0^2 \ln(t)dt$ et $\int_0^{10^10} 3\ln(t)dt$ mais évidemment pas celle-ci $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)dt$

théorème 6: une intégrale de référence (identique à celle-ci-dessus)

Soit $b > 0$ et $k \neq 0$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^b k.\ln(t)dt$ est une intégrale convergente.

théorème 7: intégrale de Riemann en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha < 1$

théorème 8: intégrale de Riemann en $+\infty$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$

théorème 9: une quatrième intégrale de référence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge ssi $\alpha > 0$

5 Des théorèmes que l'on semble déjà connaître (V076)

théorème 10: théorème de comparaison des fonctions positives

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\text{au voisinage de } b^-, \text{ on ait } 0 \leqslant f \leqslant g$$

Alors :

i) Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.

ii) Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

rem: dire qu'au voisinage de b^-, on a $0 \leqslant f \leqslant g$ signifie $\exists\, c \in [a,b[, \forall t \in [c,b[, 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

exemple 10:

Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{3+\cos t}}$

- Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^{3+\cos t}} = \exp(-(3+\cos t).\ln t)$.
  La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ comme composée de fonctions continues.

- Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$.
  La fonction g est continue sur $[1,+\infty[$.

- On a $\forall t \in [1,+\infty[, 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$
  En effet:

- Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt$ est une intégrale de référence convergente, on peut affirmer par théorème que l'intégrale I est convergente

exemple 11:

Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\cos t}}$

- Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^{\cos t}} = \exp(-(\cos t).\ln t)$.
  La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ comme composée de fonctions continues.
- Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.
  La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$.

- On a $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leqslant g(t) \leqslant f(t)$
  En effet:

- Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt$ est une intégrale de référence divergente,
  on peut affirmer par théorème que l'intégrale I est divergente

théorème 11: règle des équivalents

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $f \underset{b^-}{\sim} g$ et **si** g est de signe stable au voisinage de b^- **alors** :

les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

.

rem: comme pour les séries numériques on précisera bien que le signe est stable (quand c 'est effectivement le cas!)

exemple 12:

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{5t+4}{t^3+t^2+1}dt$

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{5t+4}{t^3+t^2+1}$ est continue sur $[1, +\infty[$
  (car quotient de fxs le dénominateur ne s'annulant pas)

- On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{5}{t^2}$

- La fonction $g : t \mapsto \dfrac{5}{t^2}$ est continue et **positive** sur $[1, +\infty[$

- Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt$ est une intégrale de référence convergente,

  la règle des équivalents permet d'affirmer que I est une intégrale convergente.

exemple 13:

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{\sin t}$

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}$ est continue sur $]0,3]$
- On a $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$
- La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et **positive** sur $]0,3]$
- Comme $\displaystyle\int_0^3 g(t)dt$ est une intégrale de référence divergente,
  la règle des équivalents permet d'affirmer que I est une intégrale divergente.

exemple 14: subtilité

Nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{5t+4}{t^3+t^2+1}dt$

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{5t+4}{t^3+t^2+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$
  (car quotient de fxs le dénominateur ne s'annulant pas)
- On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{5}{t^2}$
- La fonction $g : t \mapsto \dfrac{5}{t^2}$ est continue et **positive** sur $\cancel{[0,+\infty[}$ $[1,+\infty[$
- Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)dt$ est une intégrale de référence convergente,

  la règle des équivalents permet d'affirmer que I est une intégrale convergente.

théorème 12: théorème de comparaison des fonctions positives

Soit $]a,b]$ un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues de $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

au voisinage de a^+, on ait $0 \leqslant f \leqslant g$

Alors :

i) Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge.

ii) Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge.

rem dire qu'au voisinage de a^+, *on a* $0 \leqslant f \leqslant g$ *signifie* $\exists\, c \in]a,b], \forall t \in]a,c], 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$

théorème 13: règle des équivalents

Soit $]a,b]$ un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues de $]a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $f \underset{a^+}{\sim} g$ et **si** g est de signe stable au voisinage de a^+ **alors** :

$\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

théorème 14: théorème de la limite monotone (rappel)

Soit $]a,b[$ un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ (éventuellement $]a,b[=\mathbb{R}$ tout entier)
Soit F une fonction **croissante** sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors:

i) F **possède une limite finie en** b^- <u>**ssi**</u> F **est majorée sur** $]a,b[$.
Plus précisément:
- si F est majorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{b^-} F = \sup\limits_{]a,b[}(F) \in \mathbb{R}$
- si F n'est pas majorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{b^-} F = +\infty$

ii) F **possède une limite finie en** a^+ <u>**ssi**</u> F **est minorée sur** $]a,b[$.
Plus précisément:
- si F est minorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{a^+} F = \inf\limits_{]a,b[}(F) \in \mathbb{R}$
- si F n'est pas minorée sur $]a,b[$ alors $\lim\limits_{a^+} F = -\infty$

théorème 15: la primitive d'une fonction positive est une fonction croissante!

Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a,b[$.

On note pour tout $x \in [a,b[, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Alors:

i) La fonction F est croissante sur $[a,b[$

ii) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge ssi la fonction** F **est majorée sur** $[a,b[$

et dans ce cas on a : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \sup_{x\in[a,b[} F(x)}$

6 Et l'absolue convergence?

définition 6: une définition bien générale

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la fonction f est intégrable sur l'intervalle I lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente.

on dit encore que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente.*

théorème 16:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f est intégrable sur I **alors** $\displaystyle\int_I f = \int_I f(t)dt$ est convergente, et $\boxed{\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|}$

autrement dit: "l'absolue convergence entraine la convergence. . . "

remarque 1

i) *le théorème ci-dessus est une implication:*

$$\text{si } \int_a^b |f| \text{ CV alors } \int_a^b f \text{ CV}$$

ii) *Il existe des fonctions telles que* $\displaystyle\int_a^b f$ *CV mais* $\displaystyle\int_a^b |f|$ *DV*

On montrera que $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ *CV mais que* $\int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ *DV*

Autrement dit, avec le vocabulaire de la définition précédente,

l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ ***converge mais la fonction*** $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ***n'est pas intégrable sur*** $[1,+\infty[$ ***!***

théorème 17: exemples de référence énoncés en terme d'intégrabilité de fonctions

Comme les intégrandes sont de signes stables sur l'intervalle considéré, il résulte des paragraphes précédents que:

i) la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$

ii) la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$

iii) la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$ ssi $\alpha < 1$

iv) la fonction $t \mapsto \exp(-\alpha t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ssi $\alpha > 0$

A retenir: si f est intégrable sur I alors f est intégrable sur tout intervalle inclus dans I

exemple 15: des vérifications immédiates

1. Vérifier que la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$
2. Vérifier que la fonction $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable ssi $\alpha > 1$

1. Il s'agit de montrer que $\int_0^1 |\ln t| dt$ CV

   Pour tout $t \in]0,1]$, on a $|\ln t| = -\ln t$
   On sait que $\int_0^1 \ln t \, dt$ est une intégrale de référence CV, donc $\int_0^1 -\ln t \, dt$ est aussi CV

2. Il s'agit de montrer que $\int_1^\infty |f_\alpha|$ CV ssi $\alpha > 1$ (Ce qui est trivial ici!)
   La fonction f_α est positive, donc $|f_\alpha| = f_\alpha$
   On sait que $\int_1^\infty f_\alpha$ CV ssi $\alpha > 1$
   Ainsi $\int_1^\infty |f_\alpha|$ CV ssi $\alpha > 1$

théorème 18:
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si f est intégrable sur I **alors** $\int_I f = \int_I f(t)dt$ est convergente, et $\boxed{\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|}$

on a envie de dire "l'absolue convergence entraine la convergence... "

remarque 2 (*"une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment"*)

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$
Comme la fonction valeurs absolue est une fonction continues,
on a $|f|$ qui est une fonction continue sur le segment $[a,b]$
On sait alors par théorème que $\int_a^b |f|$ existe.
On a montré, avec le vocabulaire de la définition précédente, que

"une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment !"

théorème 19: théorème de comparaison pour les fonctions C^0 et intégrables sur $[a,b[$
Soit $[a,b[$ un intervalle semi-ouvert avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$.

Si $f =_{b^-} O(g)$ ou $f =_{b^-} o(g)$ et **si** g est intégrable sur $[a,b[$ (càd $\int_a^b |g|$ converge)

alors f est intégrable sur $[a,b[$

Rappel:

On a $f =_{b^-} o(g)$ lorsque $\lim\limits_{b^-} \dfrac{f}{g} = 0$

càd lorsqu'il existe une fonction h telle que $f = h.g$ avec $\lim\limits_{b^-} h = 0$

On a $f = O_{b^-}(g)$ lorsque la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de b^-

càd lorsqu'il existe une fonction h telle que $f = h.g$ avec h bornée au voisinage de b^-

exemple 16: très classique

Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}$ est une intégrale convergente.

1.
   - la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
     L'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement
   - Pour tout $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$
   - Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de référence convergente,
     on peut affirmer par théorème de comparaison que $\int_1^{\infty} |f(t)|dt$ converge.
   - On a montré que f est intégrable sur $]1, +\infty[$, donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ est une intégrale convergente.
2.
   - la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est le quotient de fonctions continues sur $[1, +\infty[$ le dénominateur ne s'annulant pas, donc la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$.
   - on a $\dfrac{\sin t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car la fonction sin est bornée.
   - comme la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$,

     on peut affirmer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   - on a montré que $\int_1^{\infty} |f|$ converge et donc $\int_1^{\infty} f$ converge
   - on a montré que $\int_{[1,+\infty[} |f|$ converge et donc $\int_{[1,+\infty[} f$ converge également

exemple 17: un exemple d'intégrale de Bertrand

Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^3}dt$ est une intégrale convergente.

- la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$
  l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement
- on a $\dfrac{\ln t}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en effet
- comme la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$,

  on peut affirmer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- on a montré que $\int_1^{\infty} |f|$ converge et donc $\int_1^{\infty} f$ converge
- on a montré que $\int_{[1,+\infty[} |f|$ converge et donc $\int_{[1,+\infty[} f$ converge également

  donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{t^3}dt$ est une intégrale convergente

exemple 18: très classique aussi

Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ est convergente

- la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$
  l'intégrale est généralisée en sa borne supérieure uniquement

- on a $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en effet

- comme la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue et intégrable sur $[1,+\infty[$,
  on peut affirmer que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
  f est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ (car sur le segment $[0,1]$, f est C^0)
  On a montré que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ converge

théorème 20: théorème de comparaison pour les fonctions C^0 et intégrables sur $]a,b]$

Soit $]a,b]$ un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
Soit f et g deux fonctions continues sur $]a,b]$.

Si $f =_{a^+} O(g)$ ou $f =_{a^+} o(g)$ et **si** g est intégrable sur $]a,b]$

alors f est intégrable sur $]a,b]$

exemple 19:

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}.\ln t}$ est convergente.

- la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}.\ln t}$ est continue sur $]0,1/2]$
  l'intégrale est généralisée en sa borne inférieure uniquement

- on a $\dfrac{1}{\sqrt{t}.\ln t} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en effet

- comme la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et intégrable sur $]0,1/2]$,

  on peut affirmer que f est intégrable sur $]0,1/2]$.

  On a montré que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t}.\ln t}$ est convergente

exemple 20: surprising, isn't it ?

Montrons que l'intégrale $\int_0^1 \cos(\frac{1}{t})dt$ est convergente.

- la fonction $f : t \mapsto \cos(\frac{1}{t})$ est continue sur $]0,1]$.
  L'intégrale est généralisée en sa borne inférieure uniquement.

- on a $\cos(\frac{1}{t}) = O(1)$. En effet, la fonction f est bornée!

- comme la fonction constante $g : t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0,1]$,

  on peut affirmer que f est intégrable sur $]0,1]$
- on a prouvé que $\int_0^1 f = \int_0^1 \cos(\frac{1}{t})dt$ converge

7 Grossière divergence

exemple 21:
On pose $f : t \mapsto \sin(t^2)$.
On s'intéresse à l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$

1. Dessiner l'allure du graphe de f
2. A première vue, l'intégrale I est-elle convergente?
3. Déterminer la nature de I.

- Pour $x \geqslant 1$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(t^2)dt$
- Soit $x \geqslant 1$ fixé.
  On effectue le changement de variable $t = \sqrt{\theta}$
  (ce changement de variable est bien C^1 sur $[1,x^2]$ car l'application $\theta \mapsto \sqrt{\theta}$ est C^1 sur cet intervalle)
  cela donne
  $$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin\theta}{2.\sqrt{\theta}} d\theta$$
- Nous allons maintenant réaliser un ipp

  On pose $u(\theta) = -\cos\theta$ et $v(\theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{\theta}} = \dfrac{1}{2}.\theta^{-1/2}$

  On a alors $u'(\theta) = \sin\theta$ et $v'(\theta) = \dfrac{-1}{4}.\theta^{-3/2} = \dfrac{-1}{4.\theta^{3/2}}$

  ce qui donne
  $$F(x) = \left[\frac{-\cos\theta}{2\sqrt{\theta}}\right]_1^{x^2} - \frac{1}{4}\int_1^{x^2} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}} d\theta = \frac{\cos 1}{2} - \frac{\cos x^2}{2x^2} - \frac{1}{4}\int_1^{x^2} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}} d\theta$$
- Il est clair que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x^2}{2x^2} = 0$ *(produit d'une fx bornée par une fx qui tend vers 0)*
- **S'intéresser à** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^{x^2} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}} d\theta$

  c'est s'intéresser à la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}} d\theta$ **!**

  On a $\forall\theta \geqslant 1\,, 0 \leqslant \left|\dfrac{\cos\theta}{\theta^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\theta^{3/2}}$ et comme $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^{3/2}}$ converge,

  On peut affirmer par théorème de comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}} d\theta$ converge.

  Ce qui nous assure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^{x^2} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}} d\theta$ existe et est finie !
- On a justifié que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est finie.

  c'est à dire, on a montré que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin(t^2)dt$ converge.

  rem: au passage, on a aussi prouvé l'égalité $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin(t^2)dt = \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{\infty} \frac{\cos\theta}{\theta^{3/2}} d\theta$

.

définition 7: intégrale grossièrement divergente

- Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$.
  On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)dt$ est grossièrement divergente lorsque f possède une limite en $+\infty$ **et** que cette limite est non nulle.

- Soit f une fonction continue sur $]-\infty,a]$.
  On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ est grossièrement divergente lorsque f possède une limite en $-\infty$ **et** que cette limite est non nulle.

rem: la notion de GDV pour une intégrale n'existe que pour une borne $+\infty$ ou $-\infty$.

rem: on notera bien que si f ne possède pas de limite en $+\infty$ alors on ne dit pas que l'intégrale est gdv! et l'on comprend pourquoi, on a vu en exemple que la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ ne possède pas de limite en $+\infty$ mais on a vu $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin(t^2)dt$ converge!

définition 8: série grossièrement divergente (rappel)

La série numérique $\sum u_n$ est dite grossièrement divergente lorsque u_n ne tend pas vers 0, *c'est à dire*:
i) ou u_n possède une limite **et** cette limite est non nulle
ii) ou u_n ne possède pas de limite

Ainsi on peut dire que $\sum \sin(n)$ est GDV mais pas que $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(t)dt$ est GDV

8 Intégrale généralisée en ses deux bornes

définition 9:

Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit f une fonction continue de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

1. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente
   s'il existe $c \in]a,b[$ tel que chacune des deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent.
   On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$
2. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

grâce à cette définition, on pourra utiliser la relation de Chasles et la linéarité pour les intégrales impropres convergentes.

proposition 1

Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soit f une fonction continue de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes:

i) il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.

ii) pour tout $d \in]a,b[$, les intégrales $\int_a^d f$ et $\int_d^b f$ convergent.

idée de la démonstration:

- *ii)* $\Longrightarrow$ *i) trivial*
- *i)* $\Longrightarrow$ *ii)*
  il suffit de dire que la fonction f est continue sur $]a,b[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]a,b[$, en particulier $[c,d]$ ou $[d,c]$.

on retiendra de cette proposition que peu importe où on "coupe" l'intégrale

exemple 22:
Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2}$

exemple 23:
Nature de $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

- pour $\alpha \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ DV donc I_α DV
- pour $\alpha < 1$, on a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ DV donc I_α DV

Conclusion: I_α DV pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

exemple 24:
Nature de $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^3} dt$

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^3}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale I est généralisée en ses deux bornes.

- Etude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^3} dt$

- Etude de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^3}dt$

remarque 3 (*cas où $I = \mathbb{R}$*)

Pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, il faut et il suffit donc d'étudier séparément la convergence en $+\infty$ et en ∞. Si l'une des deux diverge, on peut directement affirmer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ est divergente.

Attention! Il ne faut surtout pas s'intéresser à $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$!

En revanche, on peut s'intéresser à la limite de $\displaystyle\int_x^y f(t)dt$ lorsque $x \to -\infty$ et $y \to +\infty$
(l'idée est de "séparer" les 2 problèmes de convergence)

exemple 25:

Nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.dt$

- Il est clair que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.dt$ est une intégrale GDV, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.dt$ DV
- Il n'en est pas moins clair que $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} t.dt = \lim\limits_{x\to\infty} \left[t^2/2\right]_{-x}^{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$

9 Des théorèmes pas vraiment indispensables

théorème 21: changement de variable strictement croissant

Soit $]a,b[$ et $]\alpha,\beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$
Soit f une fonction continue de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit φ une fonction de classe C^1, strictement croissante et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$.
Alors :
les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)).\varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

dans la pratique, cela revient

- *à poser $t = \varphi(u)$ et ainsi à remplacer dt par $\varphi'(u)du$*
- *à préciser que φ est C^1 et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$*
- *puis à dire que $t \to a$ [resp. $t \to b$] équivaut à $u \to \alpha$ [resp. $u \to \beta$] par croissance de φ*

théorème 22: changement de variable strictement décroissant

Soit $]a,b[$ et $]\alpha,\beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$
Soit f une fonction continue de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit φ une fonction de classe C^1, strictement décroissante et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$.
Alors :
les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\beta^\alpha f(\varphi(u)).\varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

dans la pratique, cela revient

- *à poser $t = \varphi(u)$ et ainsi à remplacer dt par $\varphi'(u)du$*
- *à préciser que φ est C^1 et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$*
- *puis à dire que $t \to a$ [resp. $t \to b$] équivaut à $u \to \beta$ [resp. $u \to \alpha$] par décroissance de φ*

Dans la pratique, on utilisera ces théorèmes uniquement avec des changements de variables affines en précisant bien à chaque fois qu'ils sont C^1, strictement monotones et bijectifs.

exemple 26: intégrale généralisée en $-\infty$

Nature de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^3}$

- L'intégrale est généralisée en sa borne inférieure uniquement.

- *On effectue le changement de variable affine $t = -u$.*
  Ce changement de variable est C^1, strictement monotone et bijectif.

  On peut donc affirmer que *les intégrales I et $\displaystyle\int_{+\infty}^{1} \frac{-du}{(-u)^3} = -\int_1^{\infty} \frac{du}{u^3}$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.*

- Comme $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{du}{u^3}$ est une intégrale de référence convergente,

  on peut en déduire que I converge, et l'on a $I = -\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{du}{u^3}$

exemple 27: intégrale généralisée en une borne finie autre que zéro

Nature de $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{dt}{(4-t)^\alpha} dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

- L'intégrale est généralisée en sa borne supérieure

- *On effectue le changement de variable affine $u = 4 - t$.*
  Ce changement de variable est C^1, strictement monotone et bijectif.

  On peut donc affirmer que *les intégrales I et $\displaystyle\int_2^0 \frac{-du}{u^\alpha} = \int_0^2 \frac{du}{u^\alpha}$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.*

- Or on sait que $\displaystyle\int_0^2 \frac{du}{u^\alpha}$ CV ssi $\alpha < 1$

- Conclusion: $\boxed{I \text{ converge ssi } \alpha < 1}$

exemple 28: intégrale généralisée en une borne finie autre que zéro

Soit $a < b$ deux réels.

Déterminer la nature de $I = \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a,b]$, donc I est généralisée en sa borne inférieure uniquement.

- On effectue le changement de variable affine $u = t - a$.
  Ce changement de variable est C^1, strictement monotone et bijectif.

  On peut donc affirmer que *les intégrales I et $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{du}{u^\alpha}$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.*

- Or on sait que $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{du}{u^\alpha}$ CV ssi $\alpha < 1$

- Conclusion: $\boxed{I \text{ converge ssi } \alpha < 1}$

exemple 29:

Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt$ et $J = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt$ sont de même nature

On pourrait utiliser le théorÃ¨me 23... mais je préfÃ¨re faire sans comme ci-dessous

- L'intégrale I est généralisée en sa borne supérieure uniquement.

- Soit $x \geqslant 1$.

  On note $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t} dt$

  On effectue une intégration par parties en posant

  $u(t) = \sin t$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$.

  On a donc
$$F(x) = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt$$
  On remarque que
$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^x = -\sin 1 \in \mathbb{R}$$
  On en déduit l'équivalence
$$\lim_{x\to\infty} F(x) \text{ existe et est finie} \iff \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt \text{ existe et est finie}$$
  Ce qui signifie exactement
$$\int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt \text{ converge} \iff \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt \text{ converge}$$

théorème 23: intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 de $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
telles que le produit $u.v$ possède <u>une limite finie</u> en a^+ et en b^-.

Alors:

i) Les intégrales $\int_a^b u.v'$ et $\int_a^b u'.v$ sont de même nature.

ii) En cas de convergence, on a de plus

$$\boxed{\int_a^b u.v' = \lim_{t\to b^-} u(t)v(t) - \lim_{t\to a^+} u(t)v(t) - \int_a^b u'.v = [u.v]_{a^+}^{b^-} - \int_a^b u'v}$$

rem: il est toujours possible de se passer de ce théorème en effectuant une ipp sur un segment (cours de sup) puis un passage à la limite

remarque 4

Dans le cas où l'hypothèse "le produit fg possède une limite finie en a^+ et en b^- " n'est pas vérifiée, on ne peut bien sûr pas utiliser le théorème précédent. Cependant on peut toujours effectuer une intégration par parties classique sur un segment inclus dans $]a,b[$ ($[a,b[$ ou $]a,b]$) puis faire un passage à la limite comme dans l'exemple précédent.

théorème 24: fonctions à valeurs complexes

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I.
On note f_1 et f_2 sa partie réelle et sa partie imaginaire. (On a donc $f = f_1 + if_2$).

Alors

i) f est dérivable sur I ssi f_1 et f_2 sont dérivables sur I.

ii) f est intégrable sur I ssi f_1 et f_2 sont intégrables sur I.

iii)
$$\int_I f_1 + if_2 \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_I f_1 \text{ et } \int_I f_2 \text{ convergent}$$

et dans ce cas on a $\boxed{\int_I f_1 + if_2 = \int_I f_1 + i\int_I f_2}$

Il est à bien noter que si $\int_I f_1$ et $\int_I f_2$ divergent, on peut affirmer que $\int_I f_1 + if_2$ diverge aussi...

Les résultats résultent directement de la propriété suivante sur les fonctions complexes.

proposition 2 (*limite d'une fonction à valeurs complexes*)

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) = f_1(t) + i.f_2(t) \end{array}}$ et $t_0 \in \overline{I}$.

On a l'équivalence:

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = a + ib \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow \lim_{t\to t_0} f_1(t) = a \text{ et } \lim_{t\to t_0} f_2(t) = b$$

tout se passe comme si $\mathbb{C}$ était identifié à $\mathbb{R}^2$, on sait alors que la limite de la fonction vectorielle est à considérer composante par composante

pour la démonstration de ce résultat, on utilise l'égalité $|f(t) - (a+ib)| = \sqrt{(f_1(t)-a)^2 + (f_2(t)-b)^2}$

10 Des propriétés des intégrales... généralisées... aux intégrales généralisées!

théorème 25:
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Notons $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors :

i) $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$ est un sev de $C^0(I,\mathbb{K})$

ii) l'application $\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I f = \int_I f(t)dt \end{array}}$ est une application linéaire

On retiendra notamment que la somme de deux fonctions intégrables sur I est encore une fonction intégrable sur I, et que mutliplier une fonction intégrable sur I par un scalaire donne encore une fonction intégrable sur I

démonstration:

- par définition on a $\mathcal{I}(I,\mathbb{K}) \subset C^0(I,\mathbb{K})$
- la fonction constante nulle appartient à $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$ car $\displaystyle\int_I |0|$ converge (et vaut 0)
- Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$, ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Notons $f_3 = \lambda.f_1 + f_2$

  D'après l'inégalité triangulaire, on sait que On a

  $$0 \leqslant |f_3| = |\lambda.f_1 + f_2| \leqslant |\lambda|.|f_1| + |f_2| \qquad (*)$$

  Comme f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{I}(I,\mathbb{K})$, on sait que $\displaystyle\int_I |f_1|$ et $\displaystyle\int_I |f_2|$ sont deux intégrales convergentes.

  On sait alors par théorème que $\displaystyle\int_I |\lambda|.|f_1| + |f_2|$ sera une intégrale convergente.

  (comme somme d'intégrales convergentes).

  puis, d'aprÃ¨s $(*)$, par application du théorème de comparaison des fonctions positives, on peut affirmer que $\displaystyle\int_I |f_3|$ converge.

  Ce qui prouve que $\lambda.f_1 + f_2 \in \mathcal{I}(I,\mathbb{K})$

  et l'on vient ainsi de prouver la stabilité par combinaison linéaire

- On a déjà prouvé que pour des intégrales convergentes on a

  $$\int_I \lambda.f_1 + f_2 = \lambda.\int_I f_1 + \int_I f_2$$

  ce qui prouve le point ii)

théorème 26: positivité et croissance de l'intégrale

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient f et g deux fonctions continues et intégrables sur I .

Alors:

i) Si f est positive sur I alors $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$

ii) Si $f \leqslant g$ sur I alors $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$

rappel: dire que f est positive sur I signifie que $\forall t \in I, f(t) \geqslant 0$
rappel: dire que $f \leqslant g$ sur I signifie que $\forall t \in I, f(t) \leqslant g(t)$

théorème 27:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors, on a les équivalences:

$$\boxed{\int_I |f(t)|dt = 0 \iff f \text{ est nulle sur } I \iff \forall t \in I, f(t) = 0}$$

rem: on adoptera pour les intégrales généralisées la même rédaction que pour les autres intégrales.

- Si f est continue, positive telle que $\displaystyle\int_I f = 0$ alors f est nulle sur I
- Si f est continue, positive et non identiquement nulle sur I alors $\displaystyle\int_I f > 0$

exemple 30:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\int_0^{\infty} |P(t)|.e^{-t}dt = \int_{[0,+\infty[} |P(t)|.e^{-t} = 0$.
Montrer que P est le polynôme constant nul.

11 Comparaison série-intégrale

théorème 28:
Soit n_0 un entier positif.
Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.
Alors :

i) la série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

ii) dans le cas de convergence :

$$\forall n \geqslant n_0, \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

dans la démonstration on utilise l'inégalité vue dans le chapitre sur les séries numériques:

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt}$$

exemple 31: La preuve des séries de Riemann: enfin!
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

- si $\alpha = 0$ on a $\forall n \geqslant 0, u_n = 1$ et donc la série $\sum u_n$ est GDV
- si $\alpha < 0$ on a $\lim u_n = +\infty$ et donc la série $\sum u_n$ est GDV
- soit $\alpha > 0$.

  Notons $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$

  . la fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et l'on a $f'(t) = \dfrac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} < 0$

  . la fonction f est ainsi continue et décroissante sur $[1, +\infty[$

  . d'après le théorème de comparaison série-intégrale, on peut affirmer que

  la série de terme général $f(n) = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$ sont de même nature

  . or on a montré que: $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)dt$ converge ssi $\alpha > 1$

  on a donc bien: la série de terme général $f(n) = \dfrac{1}{n^\alpha}$ ssi $\alpha > 1$

exemple 32:

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n.(\ln n)^{\alpha}}$ dans le cas $\alpha = 1$ puis dans le cas $\alpha = -50$

exemple 33: il est important de comprendre la différence entre $f(x)$ et $f(n)$!

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$

1. Prouver que les implications suivantes sont vraies
   i) si la fonction f est bornée alors la suite (u_n) est bornée
   ii) si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est croissante
   iii) si $\lim\limits_{+\infty} f$ existe et est finie alors la suite (u_n) converge
2. Justifier que les implications réciproques sont fausses

On retiendra que les propriétés de la fonction f se transmettent à la suite $(f(n))_n$ mais que le contraire est FAUX!

- On suppose que $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leqslant M$

  c'est en particulier vrai pour $t = n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$

  d'où $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f(n)| \leqslant M$

  ce qui est la définition de "(u_n) est une suite bornée"

- On suppose que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $x \leqslant y$ on a $f(x) \leqslant f(y)$

  c'est en particulier vrai pour $(x,y) = (n,n+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

  on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leqslant f(n+1)$

  ce qui est la définition de "(u_n) est une suite croissante"

- On suppose que $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall t \geqslant A, |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$

  notons $n_0 = [A] + 1 \in \mathbb{N}$.

  On a $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall t \geqslant n_0, |f(t) - l| \leqslant \varepsilon$

  c'est en particulier vrai pour $t = n \in \mathbb{N}$

  on a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |f(n) - l| \leqslant \varepsilon$

  ce qui est la définition de $\lim u_n = l$

On suppose que la suite $(f(n))$ est croissante.

par exemple $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$
On suppose que la suite $(f(n))$ est convergente

par exemple $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3$

Notons $f : t \mapsto \dfrac{1}{t.\ln^\alpha(t)}$

- La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ et l'on a $\forall t \geqslant 2, f'(t) = -\dfrac{\alpha+\ln t}{t^2.(\ln t)^{\alpha+1}}$

- pour $\alpha = 1$, on en déduit que $\forall t \geqslant 2, f'(t) < 0$

  la fonction f est continue et décroissante sur $[2,+\infty[$.

  le théorème de comparaison série-intégrale permet d'affirmer que

  la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ sont de même nature

- Or on a déjà vu en exercice que $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dt}{t.\ln t}$ diverge

  Conclusion la série $\sum \dfrac{1}{n.\ln n}$ est divergente

- pour $\alpha = -50$, on a $\forall t \geqslant 2, f'(t) = \dfrac{50-\ln t}{t^2.(\ln t)^{-49}}$

  on a ainsi pour $t \geqslant e^{50}, f'(t) \leqslant 0$

  notons $n_0 = [e^{50}] + 1$

  la fonction f est continue et décroissante sur $[n_0,+\infty[$

  le théorème de comparaison série-intégrale permet d'affirmer que

  la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ sont de même nature

  Déterminons la nature de $\displaystyle\int_{n_0}^\infty \frac{(\ln t)^{50}}{t}dt$

  on remarque que $F(x) = \displaystyle\int_{n_0}^x \frac{(\ln t)^{50}}{t}dt = \left[\frac{(\ln t)^{51}}{51}\right]_{n_0}^x$

  et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

  Conclusion: l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^\infty \frac{(\ln t)^{50}}{t}dt$ et la série de terme général $\dfrac{\ln^{50} n}{n}$ divergent

démonstration:
On rappelle que le début de la démonstration pour établir ces résultats est.

- Soit $k \geqslant n_0$
  Comme f est décroissante sur $[k,k+1]$ on a

$$\forall t \in [k,k+1], f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

- par croissante de l'intégrale on a alors

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt$$

- on a prouvé que

$$\forall k \geqslant n_0, f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

- puis on utilise correctement la relation de Chasles!

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)dt$ et $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k)$

Comme f est décroissante, on sait que f possède une limite en $+\infty$ (finie ou $-\infty$)

Comme $\lim\limits_{x \mapsto \infty} f(x) = l$ on sait que $\lim\limits_{n \mapsto \infty} f(n) = l$

- si $\lim f = \lim u_n \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t)dt$ sont GDV

- si $\lim f = \lim u_n = 0$ alors on sait que f sera une fonction positive sur $[n_0, +\infty[$

  on a donc F qui est une fonction croissante sur $[n_0, +\infty[$.

  et la suite (S_n) est aussi croissante.

  on sait alors que la fonction F possède une limite finie en $+\infty$ ssi elle est bornée

  la suite (S_n) possède une limite finie ssi elle est bornée

  On a vu dans le chapitre sur les séries numériques:

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, F(n+1) = \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt = f(n_0) + F(n)}$$

i) On suppose que $\displaystyle\int_{n_0}^{\infty} f(t)dt$ converge

On a donc la fonction F qui possède une limite finie en $+\infty$,

et donc la fonction F est majorée (par M)
On a donc $\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant f(n_0) + M$

La suite (S_n) est croissante majorée donc elle CV, càd $\sum u_n$ CV

ii) On suppose que $\displaystyle\int_{n_0}^{\infty} f(t)ft$ diverge

On sait alors que la fonction F ne possède pas de limite finie en $+\infty$.

Mais F étant une fonction croissante on sait qu'elle possède une limite finie ou $+\infty$.

On a donc montré que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

Comme $\forall n \geqslant n_0, F(n+1) \leqslant S_n$

on a forcément $\lim S_n = +\infty$, càd $\sum u_n$ DV

On a donc la suite (S_n) qui est convergente, et donc majorée. (par M_1)

On a donc $\forall n \geqslant n_0, F(n+1) \leqslant S(n) \leqslant M_1$

Montrons que $\forall x \in n_0, F(x) \leqslant M_1$