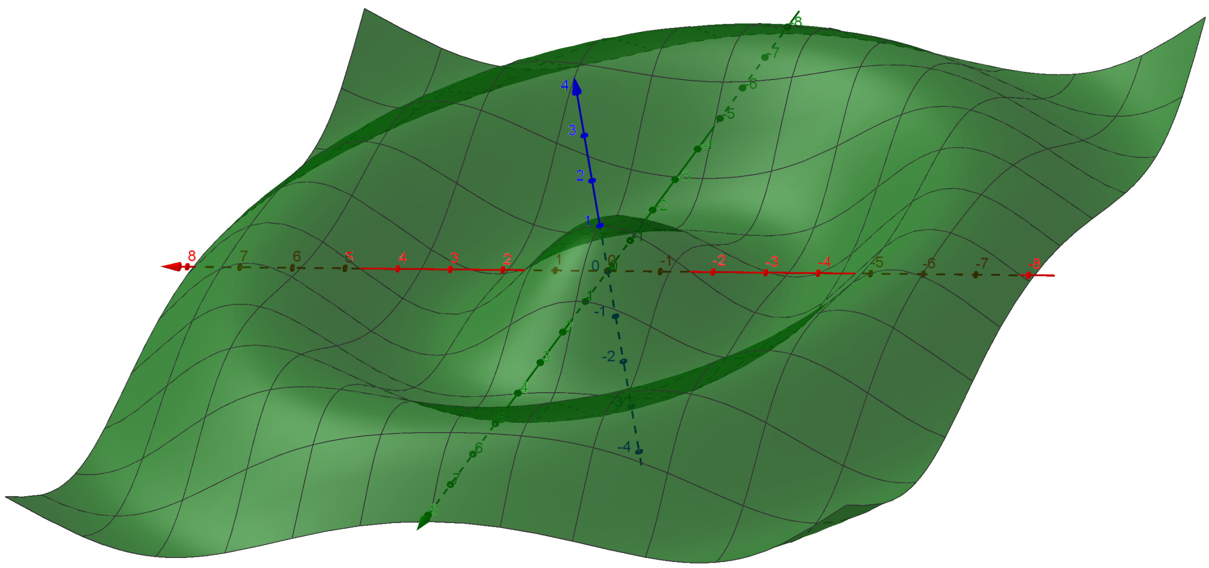
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Table des matières

Dans tout ce chapitre, on considèrera l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



1 Rappels

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^3$. Dans la suite, toutes les coordonnées seront exprimées dans ce repère. En particulier, on notera M le point générique de coordonnées (x,y,z).

1.1 convention dans un espace affine

Soient les points $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$, les vecteurs $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ et $\vec{u}'=(u_1',u_2',u_3')$, et le réel α.

i) $\vec{u}+\vec{u}'$ désigne le vecteur de coordonnées $(u_1+u_1',u_2+u_2',u_3+u_3')$
ii) $\alpha\vec{u}$ désigne le vecteur de coordonnées $(\alpha u_1',\alpha u_2',\alpha u_3')$
iii) $A+\vec{u}$ désigne le point de cordonnées $(x_A+u_1,y_A+u_2,z_A+u_3)$
iv) $A+B$ désigne le point de coordonnées $(x_A+x_B,y_A+y_B,z_A+z_B)$
v) $A-B$ désigne le vecteur $\overrightarrow{BA}$ de coordonnées $(x_A-x_B,y_A-y_B,z_A-z_B)$
vi) $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ désignera le milieu du segment $[AB]$

1.2 droites de l'espace

méthode 1: droite définie par un point et un vecteur directeur

Soit (D) la droite passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\neq\vec{0}$.

- le point $M\in(D)\iff$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\iff \overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\vec{0}$
- ainsi $M\in(D)=\vec{0}\iff \exists\, t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM}=t\vec{u}\iff \exists\, t\in\mathbb{R}, M=A+t\vec{u}$
- d'où la représentation paramètrique $\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_A+tu_1\\ y &=& y_A+tu_2\\ z &=& z_A+tu_3\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R}}$
- *exemple*:
  la droite passant par le point $A(1,2,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=(1,-1,2)$
  a pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ t & \longmapsto & A+t\vec{u}=(1,2,0)+t(1,-1,2)=(1+t,2-t,2t)\end{array}}$$

rem: dans $\mathbb{R}^3$ la colinéarité de deux vecteurs est caractérisée par le produit vectoriel et non pas le déterminant

méthode 2: droite définie par deux points

Soit (D) la droite passant par les points A et B, il suffit d'appliquer ce qui précéde avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
En particulier, on a :

- $M\in(D)\iff \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\iff \exists t\in\mathbb{R},M=A+t\overrightarrow{AB}\iff \exists t\in\mathbb{R},M=(1-t)A+tB$
- $M\in[AB]\iff \exists t\in[0,1],M=(1-t)A+tB$
- *exemple:*
  la droite passant par les points $A(1,2,0)$ et $B(2,-1,1)$ a pour représentation paramétrique:

$$\boxed{\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ t & \longmapsto & A+t\overrightarrow{AB}=(1,2,0)+t(1,-3,1)=(1+t,2-3t,t)\end{array}}$$

méthode 3: droite définie comme intersection de deux plans

deux plans non parallèles définissent une droite

$$(D):\left\{\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\right. \quad \text{avec } \vec{n}_1=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_2=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix} \text{ tels que } \vec{n}_1\wedge\vec{n}_2\neq\vec{0}$$

Le vecteur $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ est un vecteur directeur de la droite (D)

méthode 4: distance d'un point à une droite(à savoir retrouver)

Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Alors : $\boxed{d(M,(D)) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}}$

et de plus le projeté orthogonal de M sur la droite (D)
est le point H défini par

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{<\overrightarrow{AM},\vec{u}>}{||\vec{u}||^2}\vec{u}}$$

exemple:

Déterminer l'ensemble des points qui sont à la distance deux de la droite $(D) : \begin{cases} x - y &= 1 \\ y - z &= 1 \end{cases}$

1.3 plans de l'espace

méthode 5: plan défini par un point et deux vecteurs(non colinéaires)

Soit (P) le plan passant par $A(x_A,y_A,z_A)$
et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{d} = (d_1,d_2,d_3)$ et $\vec{d'} = (d'_1,d'_2,d'_3)$.

- un vecteur normal au plan est le vecteur $\vec{d} \wedge \vec{d'}$
- $M \in (P) \iff \overrightarrow{AM} \in \text{vect}\{\vec{d},\vec{d'}\}$
- ce qui donne : $M \in (P) \iff \det(\overrightarrow{AM},\vec{d},\vec{d'}) = 0 \iff \exists(t,t') \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = t\vec{d} + t'\vec{d'}$
  $\iff \exists(t,t') \in \mathbb{R}^2, M = A + t\vec{d} + t'\vec{d'}$
- d'où la représentation paramétrique suivante $\boxed{\begin{cases} x &= x_A + td_1 + t'd'_1 \\ y &= y_A + td_2 + t'd'_2 \\ z &= z_A + td_3 + t'd'_3 \end{cases} \text{ avec } (t,t') \in \mathbb{R}^2}$
- *exemple:*
  Le plan passant par le points $A(1,2,1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{d} = (1,0,-1)$ et $\vec{d'} = (2,2,-1)$ a pour représentation paramétrique:
  $$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t,t') & \longmapsto & A + t\vec{d} + t'\vec{d'} = (1,2,1) + t(1,0,-1) + t'(2,2,-1) = (1+t+2t',2+2t',1-t-t') \end{array}}$$
  et a pour équation cartésienne:
  $$\boxed{\det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{u'}) = 0 \text{ càd } \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & 0 & 2 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ soit } 2x - y + 2z - 2 = 0}$$

méthode 6: plan défini par un point et un vecteur normal

Soit (P) le plan passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (n_1,n_2,n_3) \neq \vec{0}$.

- $M \in (P) \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
- une équation cartésienne du plan est donc $n_1x + n_2y + n_3z - n_1x_A - n_2y_A - n_3z_A = 0$
- un couple de vecteurs directeurs est constitué de 2 vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}$
- *exemple:*
  Le plan passant par le point $A(1,2,1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2,-1,3)$ a pour équation cartésienne:
  $\boxed{\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \text{ càd } 2.(x-1) + (-1).(y-2) + 3.(z-1) = 0 \text{ soit } 2x - y + 3z - 3 = 0}$ et en isolant une variable, par exemple $y,(y = 2x + 3z - 3)$, *cela donne la rep. paramétrique* $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t,t') & \longmapsto & (t,2t+3t'-3,t') \end{array}}$

exemple 1: 3 points non alignés définissent un plan

Déterminer une équation du plan passant par les points $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ et $C(2,1,1)$?
Trois points de vue sont possibles:

i) On cherche l'équation du plan sous la forme $ax + by + cz + d = 0$, et on écrit le système...
ii) On dit que c'est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$...
iii) On écrit déja des équations paramétriques du plan, en disant qu'il passe par A et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis on élimine les paramètres...

méthode 7: distance d'un point à un plan: à savoir retrouver

La distance entre le point $M(x,y,z)$ et le plan (P) d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule $\boxed{d(M,(P)) = \dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$.
De plus, si $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan et A un point du plan, le projeté orthogonal du point M sur le plan est le point K qui vérifie l'égalité $\boxed{\overrightarrow{MK} = \dfrac{< \overrightarrow{MA},\vec{n} >}{||\vec{n}||^2}\vec{n}}$

1.4 sphère

- la sphère de centre $\Omega = (x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M qui vérifient la condition $d(\Omega,M) = ||\overrightarrow{\Omega M}|| = R$, ce qui donne comme équation cartésienne
$\boxed{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2}$
- sphère de diamètre $[AB]$: ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

1.5 cercle dans l'espace

exemple 2:

Pour définir un cercle de l'espace, il ne suffit pas de donner son centre et son rayon: il faut également préciser le plan dans lequel il est tracé.

- *exemple:*
soit C le cercle de centre O et de rayon 1 tracé dans le plan xOy
soit C' le cercle de centre $O'(0,0,1)$ et de rayon 1 tracé dans le plan d'éq. $z = 1$
soit C'' le cercle de centre $O''(0,0,4)$ et de rayon 1 tracé dans le plan d'éq. $z = 4$
- *Attention:*
lorsque l'on est dans l'espace,
l'ensemble des points qui vérifient
l'équation $x^2 + y^2 = 1$ n'est pas un cercle...
mais un cylindre de révolution (d'axe (Oz))!

proposition 1 (*intersection sphère-plan*)

Soit S une sphère de centre Ω et de rayon R, et soit P un plan.
On note A la projection orthogonale de Ω sur P.

- *si $R < d(\Omega,P)$, alors $S \cap P = \emptyset$*
- *si $R = d(\Omega,P)$, alors $S \cap P = \{A\}$*
- *si $R > d(\Omega,P)$, alors $S \cap P$ est le cercle de centre A et de rayon $r = \sqrt{R^2 - A\Omega^2}$*

1.6 divers

- **Le volume du parallélépipède** de vecteurs de base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est donné par $\boxed{|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|}$
- **changements de repères affines:** Les formules obtenues dans le plan sont à adapter (cf. poly coniques)
- **coordonnées cylindriques**
  Soit $M(x,y,z)$ un point.
  On note $H(x,y,0)$ son projeté orthogonal sur le plan xOy.
  Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OH} = r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$
  (r,θ,z) s'appellent les coordonnées cylindriques de M.

exemple 3: perpendiculaire commune, distance entre deux droites

Soient les deux droites $(D_1) : \begin{cases} x - y &= 1 \\ y + z &= 0 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x + z &= 0 \\ y - 2x &= 1 \end{cases}$.
On appelle **perpendiculaire commune à** (D_1) **et** (D_2) la droite qui intersectent (D_1) et (D_2) en leur étant perpendiculaire. Déterminer ici cette perpendiculaire commune.

méthode 8: obtenir la perpendiculaire commune à deux droites non parallèles

Soient D_1 et D_2 deux droites non parallèles.

- D_1 est la droite passant par le point A_1 et de vecteur directeur $\vec{u_1}$
- D_2 est la droite passant par le point A_2 et de vecteur directeur $\vec{u_2}$,

alors la perpendiculaire commune Δ est dirigée par $\vec{n} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.
Notons P_1 le plan passant par A_1 et dirigé par $\vec{n}$ et $\vec{u_1}$
et P_2 le plan passant par A_2 et dirigé par $\vec{n}$ et $\vec{u_2}$.
Alors $\Delta = P_1 \cap P_2$
Si on note K_1 le point $D_1 \cap P_2$, alors Δ passe par le point K_1
conclusion: La perpendiculaire commune est la droite passant par le point K_1 et dirigée par le vecteur $\vec{n}$
bonus: donner la distance entre ces deux 2 droites en fonction de $A_1, A_2, \vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

2 Courbes paramétrées de l'espace

- Une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de points(de l'espace) qui sont paramétrés par un, et un seul, paramètre réel. $\boxed{\Gamma = \{M(t) | t \in I\}}$

définition 1:

- On appelle courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ de classe C^1
  tout couple (I,f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et
  f une fonction vectorielle de classe C^1 de $I \to \mathbb{R}^3$
- On note $M(t)$ ou M_t le point de coordonnées $f(t)$.
- On appelle support de la courbe paramétrée,
  et on note Γ, l'ensemble des points M_t avec $t \in I$

On a donc $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & M(t) = f(t) \end{array}}$

Comme pour les arcs paramétrés plans, un même support peut posséder deux paramétrisations distinctes

exemple 4:

Le couple $(\mathbb{R},f)$ avec $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (2t, 5-t, -3+2t) \end{array}}$ est une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$.
Il s'agit
qui est également le support de l'arc paramétré $(\mathbb{R},g)$ avec $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \end{array}$

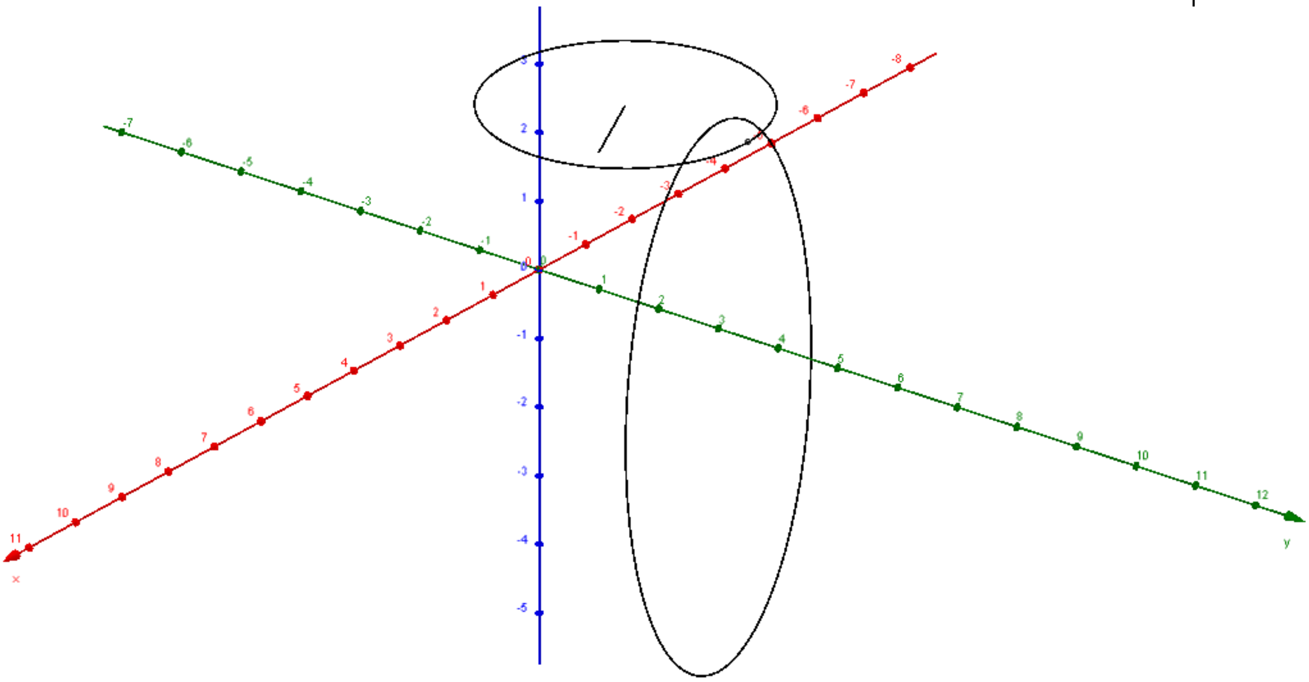
théorème 1: longueur d'un arc

La longueur est donnée par la formule : $\boxed{l(\widehat{M_{t_1}M_{t_2}}) = \int_{t_1}^{t_2} ||f'(u)||du}$

exemple 5:

Reconnaître le support des courbes paramétrées suivantes:

1. $f : t \mapsto M(t) = (2 + 2\cos(t), 3 + 2\sin(t), 4)$ avec $t \in [0, 2\pi]$
2. $g : t \mapsto M(t) = (1 + \cos(t), 2 + \cos(t), 3 + \cos(t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$
3. $h : t \mapsto M(t) = (2\cos(t), 3, -1 + 4\sin(t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$



exemple 6:

On considère la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (2\cos t, \sin t, \cos t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. La courbe possède-t-elle des symétries évidentes?
2. Déterminer les projections orthogonales sur les plans de coordonnées de cette courbe.
3. Montrer que la courbe est plane, et donner l'équation cartésienne de ce plan.
4. En effectuant un changement de repère judicieux, montrer que la courbe est une ellipse.

définition 2: point régulier, droite tangente

i) On dit que le point $M_t = f(t)$ est un point régulier de la courbe paramétrée (I, f) lorsque $f'(t) \neq \vec{0}$.
Dans le cas contraire, on dit que M_t est singulier ou stationnaire.

ii) Soit M_t un point régulier.
On appelle droite tangente en M_t à Γ la droite passant par M_t et de vecteur directeur $M'(t) = f'(t)$

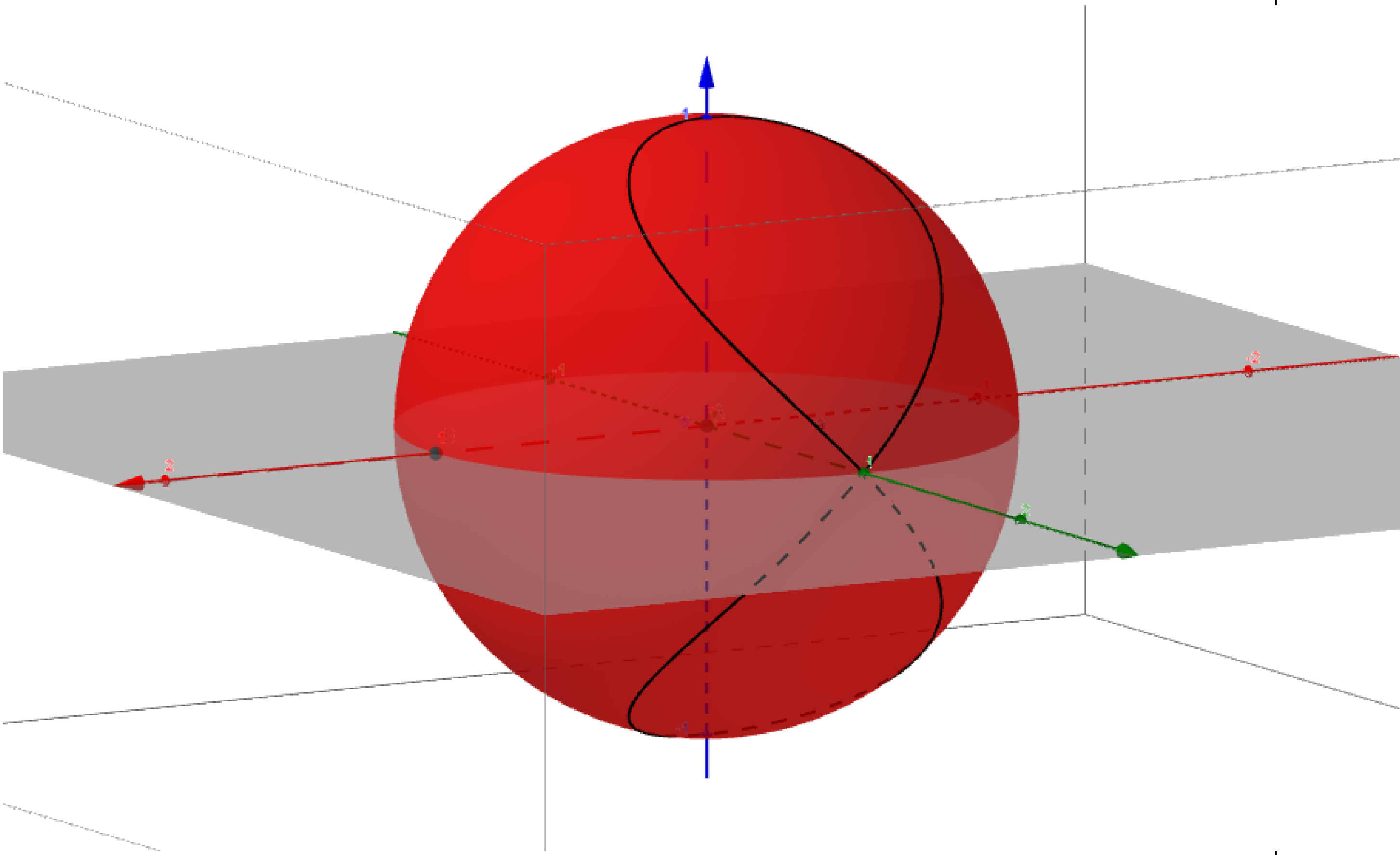
exemple 7:

Soit $\begin{array}{rccl} f: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (\cos(t)\sin(t), \sin^2(t), \cos(t)) \end{array}$.

On a pour tout t, $f'(t) = (\cos(2t), \sin(2t), -\sin(t))$.

Or $\cos(2t)$ et $\sin(2t)$ ne peuvent être nuls simultanément, donc tout point est régulier.

Ci-dessous la représentation graphique de Γ : l'arc est tracé sur la sphère de centre O et de rayon un, car $\forall t \in [0,2\pi], x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$: il s'agit d'un "huit" tracé sur la sphère...



On remarque que le point $A(0,1,0)$ est un point double de l'arc paramétré.

Déterminer l'angle entre les deux tangentes en ce point

exemple 8:

Soit $R > 0$ un réel fixé. On considère l'application $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & M(t) = M_t = (x = R\cos t, y = R\sin t, z = t) \end{array}$.

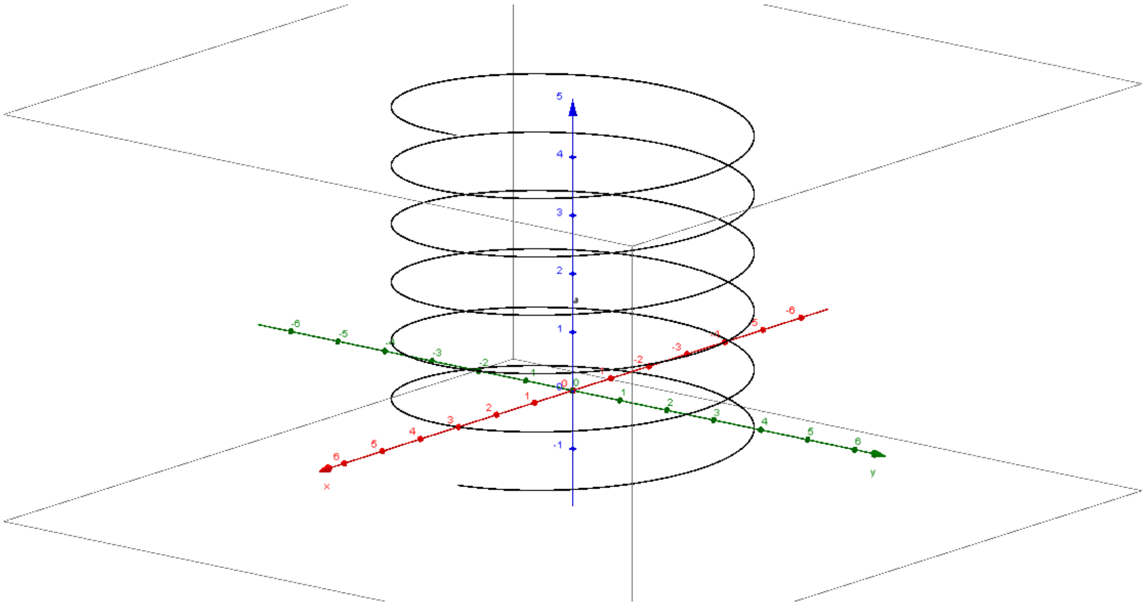
- La courbe paramétrée possède-t-elle une symétrie évidente?
- Montrer que la courbe est invariante par la translation de vecteur $2\pi\vec{k}$
- On a $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) =$ donc tout point est
- La tangente au point $M_t = f(t)$ est la droite de représentation paramétrique :

$$\lambda \mapsto M_t + \lambda.f'(t) = (R\cos t, R\sin t, t) + \lambda(-R\sin t, R\cos t, 1)$$

  en particulier, la droite tangente au point $M(0)$ est donnée par la paramétrisation

- le vecteur unitaire tangent au point courant M_t est $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}(-R\sin t, R\cos t, 1)$,

  et l'on a $\vec{T}.\vec{k} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2+1}}$ =cste. Ainsi l'angle entre la tangente et la droite (Oz) est constant.
- Pour tout t réel, calculer la longueur entre le point $M(t)$ et $M(t+2\pi)$ le long de la courbe



3 Surface paramétrée - Nappe paramétrée

– Une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de points(de l'espace) qui sont paramétrés par **deux** paramètres réels **indépendants**. $\boxed{\Sigma = \{M(u,v) | (u,v) \in U\}}$

3.1 lignes coordonnées

définition 3: nappe paramétrée ou surface paramatrée de classe C^1

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$, et $f \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$.
On appelle nappe paramétrée de classe C^k, ou surface paramétrée de classe C^k, le couple (U,f).

- En notant (u,v) les variables de f, et (x,y,z) ses fonctions coordonnées,
  f est donc définie comme suit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \end{array}}$
- On note $M(u,v)$ le point de coordonnées $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$.
- L 'ensemble $\{M(u,v) | (u,v) \in U\}$ est le support de la nappe paramétrée, c'est une surface.
- Dans la pratique, on identifie le point $M(u,v)$ avec $f(u,v)$.

définition 4: lignes coordonnées

On appelle lignes coordonnées de la surface (U,f), toute courbe paramétrée (tracée sur la surface) du type suivant:

$\boxed{u \longrightarrow f(u,v) \text{ , } v \text{ étant fixé}}$. ou $\boxed{v \longrightarrow f(u,v) \text{ , } u \text{ étant fixé}}$

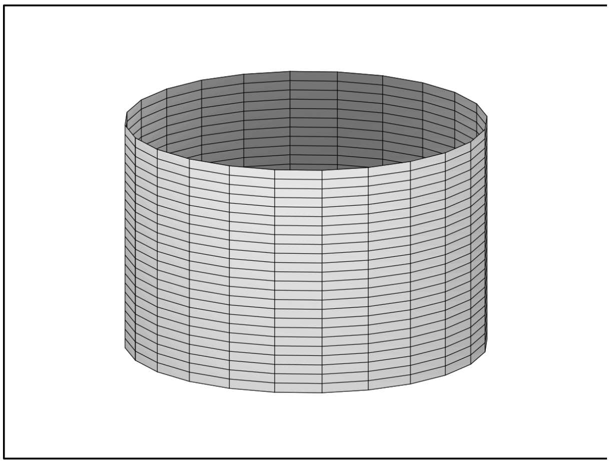
exemple 9: un plan est bien le support d'une surface paramétrée.

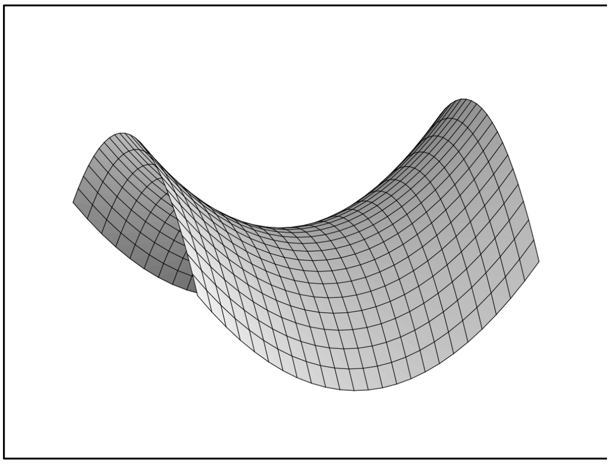
- Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (1+u+v,1+2u,-2+u-3v) \end{array}}$ Alors $(\mathbb{R}^2,f)$ est une surface paramétrée.
- on a $M(u,v) = (1+u+v,1+2u,-2+u-3v) = (1,1,-2) + u(1,2,1) + v(1,0,-3)$
- on reconnait la paramétrisation du plan passant par le point $A(1,1,-2)$ et de vecteurs directeurs $\vec{d} = (1,2,1)$ et $\vec{d'} = (1,0,-3)$
- d'une manière générale, le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{d'}$ a pour représentation paramétrique $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & A + u\vec{d} + v\vec{d'} \end{array}}$.
  La fonction f est bien une fonction vectorielle de $U = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1

exemple 10:

Soit $\boxed{\begin{array}{lcl} f:[0,2\pi]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\cos u,\sin u,v) \end{array}}$

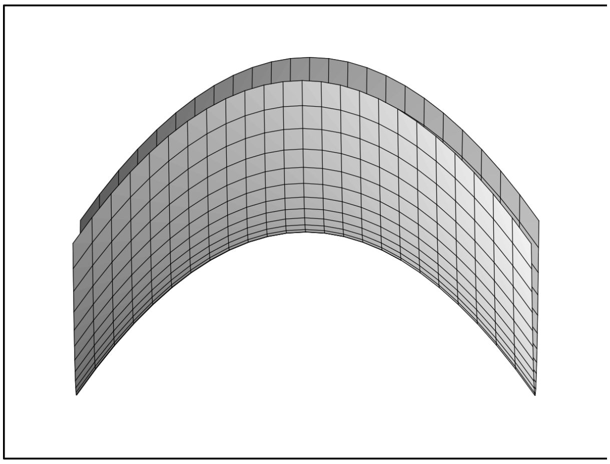
- à v fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (\cos u,\sin u,v) \end{array}}$ est le cercle de rayon un, tracé dans le plan d'équation $z=v$, et centré en $(0,0,v)$
- à u fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ v & \longmapsto & (\cos u,\sin u,v)=(\cos u,\sin u,0)+v(0,0,1) \end{array}}$ est la droite qui passe par le point $(\cos u,\sin u,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{k}$

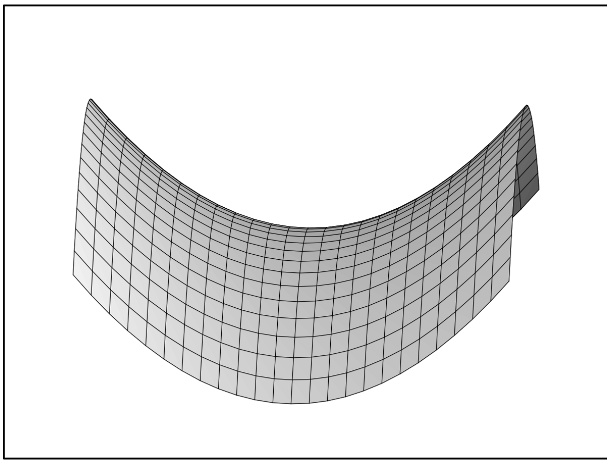




exemple 11:

- Soit $\boxed{\begin{array}{lcl} f:\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,u^2-v^2) \end{array}}$
- à v fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (u,v,u^2-v^2) \end{array}}$ une parabole "tournée vers le haut" tracée dans le plan d'éq. $y=v$
- à u fixé, la courbe paramétrée $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ v & \longmapsto & (u,v,u^2-v^2) \end{array}}$ une parabole"tournée vers le bas" tracée dans le plan d'éq. $x=u$





exemple 12:

On considère la nappe paramétrée $(\mathbb{R}^2,f)$ avec $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,u^2+2v^2)\end{array}$

1. Dans quelle partie de l'espace, le support de cette nappe est-il inclus?
2. Déterminer les lignes coordonnées.

remarque 1 (*arc tracé sur une surface*)

Soit (U,f) une surface paramétrée avec $f:(u,v)\mapsto M(u,v)$

- *lorsque u est une fonction de v,[lorsque v est une fonction de u], les variables ne sont plus indépendantes et le point est alors paramétré par le seul paramètre v [u]: il s'agit donc d'un arc paramétré qui est tracé sur la surface.*
  exemple:
  l'arc $v\mapsto(\cos v,\sin v,v)$ est tracé sur le cylindre de révolution de l'exemple 10
- *d'une manière plus générale, lorsque u et v dépendent tous les deux d'un troisième paramètre t, on a affaire à une courbe tracée sur la surface!*
  exemple:
  l'arc $t\mapsto(\cos(t^2),\sin(t^2),\cos(t))$ est tracé sur le cylindre de l'exemple 10
- *D'une manière plus abstraite, un arc paramétré de $\mathbb{R}^3$ qui est tracé sur la surface (U,f), peut être défini par (I,g) où*
  - *I est un intervalle de $\mathbb{R}$*
  - *g une fonction de $I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ qui peut s'écrire sous la forme $g=f\circ\phi$ où ϕ est une application de $I\longrightarrow U$.*

  cela revient à dire que l'on pose u et v en fonction de t.
  Dans l'exemple ci-dessus, on a posé $\phi(t)=(t^2,\cos t)$

3.2 plan tangent

définition 5: point régulier

Soit $M_0(u_0,v_0)$ un point de la nappe $\Sigma=(U,f)$.

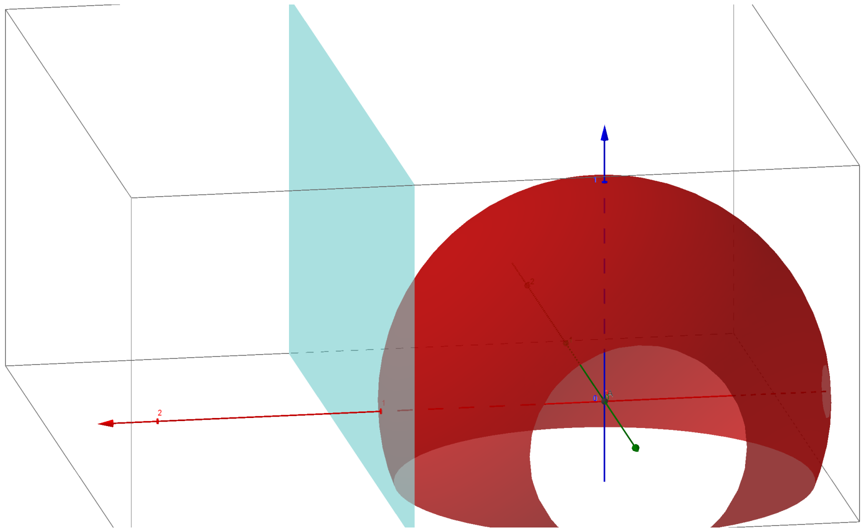
On dit que le point M_0 est un point régulier de Σ lorsque $\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)\neq\vec{0}$.
Dans le cas contraire, on dit que M_0 est un point singulier ou stationnaire.
On utilise encore la notation $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0,v_0)$ *pour* $\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)$

définition 6: plan tangent, droite normale en un point régulier

Soit $M_0(u_0,v_0)$ un point régulier de Σ

1. on appelle plan tangent en M_0 à la surface Σ le plan qui passe par M_0 et qui a pour vecteurs directeurs $\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)$
2. on appelle droite normale en M_0 à la surface Σ la droite qui passe par M_0 et qui est orthogonale au plan tangent en M_0

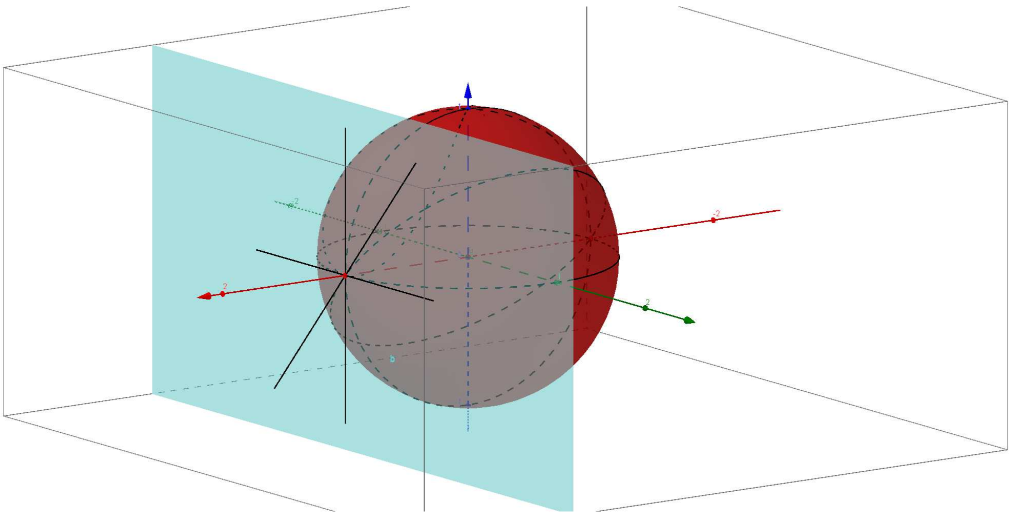
- *La droite normale est dirigée par* $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0,v_0)$
- *le plan tangent admet pour rep. paramétrique:* $\boxed{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (\lambda,\mu) & \longmapsto & M_0+\lambda\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0)+\mu\dfrac{\partial\overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)\end{array}}$



remarque 2

Soit $M_0 = M(u_0,v_0)$ un point régulier d'une nappe paramétrée (U,f)
On note $\mathcal{P}_{M_0}$ le plan tangent en M_0

- *Au point M_0 de la surface passent les deux lignes coordonnées $u \mapsto M(u,v_0)$ et $v \mapsto M(u_0,v)$.*
  La droite tangente au point M_0 à la ligne coordonnée $u \mapsto M(u,v_0)$ est incluse dans $\mathcal{P}_{M_0}$.
  Il est en de même pour la droite tangente à la seconde ligne coordonnée. (démo en classe)
- *Le plan tangent en un point régulier est la réunion des tangentes aux courbes régulières tracées sur la surface passant par ce point.*
- *idée de preuve:*
  Soit $\boxed{\begin{array}{llll} g: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & f(u(t),v(t)) = M(u(t),v(t)) = (x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t))) \end{array}}$
  un arc paramétré régulier Γ tracé sur la surface (U,f).
  On suppose que cet arc passe par le point M_0, c'est à dire qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $M_0 = g(t_0)$
  Alors la droite tangente à l'arc Γ au point $M_0 = M(u(t_0),v(t_0)) = f(u(t_0),v(t_0)) = f(u_0,v_0)$ est dirigée par le vecteur $g'(t_0) = u'(t_0)\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0) + v'(t_0)\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)$
  La droite tangente à Γ en M_0 est la droite qui passe par le point M_0 et qui est dirigé par $g'(t_0)$
  Sa représentation paramétrique est donc: $\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \longmapsto & M_0 + \lambda(u'(t_0)\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial u}(u_0,v_0) + v'(t_0)\dfrac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial v}(u_0,v_0)) \end{array}$
  il est aisé de montrer que cette droite est incluse dans le plan tangent $\mathcal{P}_{M_0}$



exemple 13:

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v,v-u,u^2+v^2) \end{array}}$ et A le point de coordonnées $(1,-3,5)$

1. Montrer que le point A est un point de la surface
2. Montrer que le point A est un point régulier de cette surface
3. Donner l'équation cartésienne du plan tangent au point A.

exemple 14:

Soit $\boxed{\begin{array}{lll} f:[0,\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\sin u.\cos v,\sin u.\sin v,\cos u) \end{array}}$

- Il s'agit d'une nappe paramétrée de classe C^∞ car les fonctions coordonnées sont des fonctions de classe C^∞ en tant que produit de fonctions usuelles.
- On a $\boxed{\dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial u}(u_0,v_0)=(\cos u_0.\cos v_0,\cos u_0.\sin v_0,-\sin u_0)}$

  et $\boxed{\dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial v}(u_0,v_0)=(-\sin u_0.\sin v_0,\sin u_0.\cos v_0,0)}$

  d'où $\boxed{\dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial v}(u_0,v_0)=(\sin^2 u_0.\cos v_0,\sin^2 u_0.\sin v_0,\cos u_0.\sin u_0)}$
- Si $\sin u_0=0$ il est clair que le produit vectoriel ci-dessus est nul.
  En revanche si $\sin u_0\neq 0$, il est tout aussi clair que le produit vectoriel est non nul: regarder les deux premières coordonnées qui ne peuvent être simultanéménent nuls!
  On en déduit que $\boxed{\text{les point réguliers de la nappe paramétrée sont les points } M(u_0,v_0) \text{ avec } u_0\notin\{0,\pi\}}$
- En un point régulier $M(u_0,v_0)$:
  Le plan tangent a pour vecteur normal

$$\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial v}(u_0,v_0)=\sin u_0(\sin u_0.\cos v_0,\sin u_0.\sin v_0,\cos u_0)$$

  L'équation cartésienne du plan tangent est donc:

$$\sin u_0.\cos v_0(x-\sin u_0\cos v_0)+\sin u_0.\sin v_0(y-\sin u_0.\sin v_0)+\cos u_0.(z-\cos u_0)=0$$

  soit

$$\boxed{\sin u_0.\cos v_0.x+\sin u_0.\sin v_0.y+\cos u_0.z-1=0}$$

- Le support de cette nappe est inclus dans la sphère de centre O et de rayon un.
  En effet: pour tout (u,v) on a

$$x^2(u,v)+y^2(u,v)+z^2(u,v)=\sin^2 u.\cos^2 v+\sin^2 u.\sin^2 v+\cos^2 u=\sin^2 u.(\cos^2 v+\sin^2 v)+\cos^2 u=\cdots=1$$

- Il est aisé de montrer que le support de la nappe paramétrée est la sphère tout entière.

3.3 paramétrisation cartésienne $z = g(x,y)$ avec g de classe C^1

On s'intéresse ici aux nappes qui possède un paramétrage du type $f(u,v) = (u,v,g(u,v))$.
On préfère alors parler des surfaces ayant une paramétrisation cartésienne du type $z = g(x,y)$
(on préfére alors noter x et y les variables de g pour ne pas multiplier les lettres inutiles)
On considérera dans ce paragraphe une nappe paramétrée (U,f) avec $\boxed{\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,g(x,y)) \end{array}}$

proposition 2

tout point d'une telle surface est régulier et le plan tangent au point $M(x_0,y_0,z_0)$ a pour équation

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0).(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0).(y - y_0)}$$

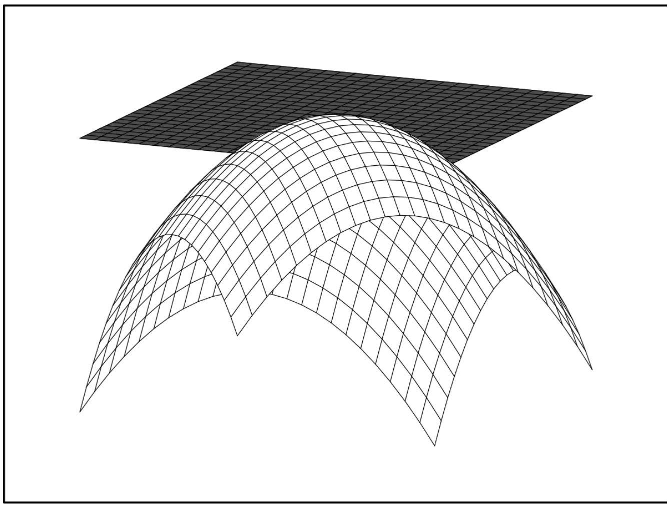
théorème 2: position d'une surface par rapport à son plan tangent

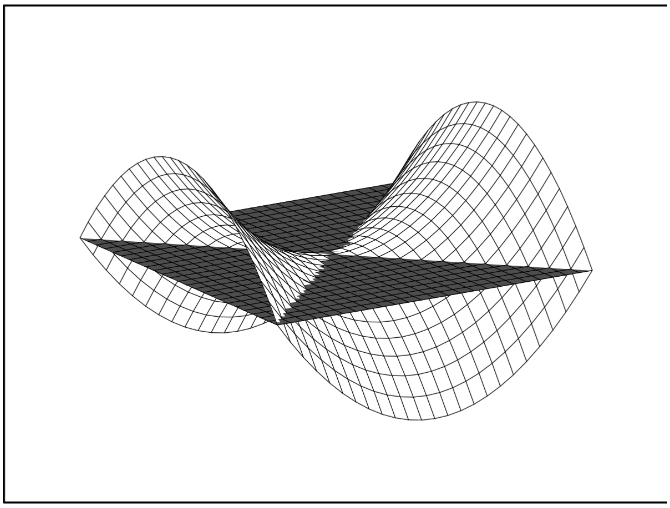
Soit M_0 un point de la surface d'équation $z = g(x,y)$ avec g de classe C^2 sur $U \subset \mathbb{R}^2$
On note H la matrice hessienne de g au point (x_0,y_0).
On suppose que [(x_0,y_0) est un point critique de g et que] H est une matrice inversible.

1. **si** les valeurs propres de H sont strictement positives **alors** au voisinage de M_0 la surface est située au dessus du plan tangent
2. **si** les valeurs propres de H sont strictement négatives **alors** au voisinage de M_0 la surface est située en dessous du plan tangent
3. **si** les valeurs propres de H sont de signes opposés **alors** la surface traverse le plan tangent au voisinage de M_0

remarque 3

Dans les deux premiers cas, on dit que M_0 est un point elliptique ou qu'il présente une disposition en ballon. et dans le troisième cas, on parle de point hyperbolique ou d'une disposition en col ou en selle.





remarque 4

Lorsque (x_0,y_0) n'est pas un point critique de g, il est possible d'étudier tout de même la position de la surface par rapport au plan tangent en étudiant, au voisinage du point (x_0,y_0) le signe de la fonction
$(x,y) \mapsto g(x,y) - g(x_0,y_0) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0).(x - x_0) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0).(y - y_0)$

4 Surfaces définies par une équation cartésienne

Soit F une fonction de $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
On considère la surface Σ, ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $F(x,y,z) = 0$.
Cette équation s'appelle une équation cartésienne de Σ.
Comme d'habitude, on identifiera le point M de coordonnées (x,y,z) et le triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

remarque 5

- *On peut remarquer que les surfaces paramétrées étudiées ci-dessus du type $z = g(x,y)$ sont un cas particulier de surface définie par leur équation cartésienne; en effet, si on définit la fonction F de la manière suivante en posant $F(x,y,z) = g(x,y) - z$, alors on a l'équivalence*
$$z = g(x,y) \Longleftrightarrow F(x,y,z) = 0$$
- *Soit un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ de la surface Σ, on admet qu'il existe localement un paramétrage de classe C^1 de la surface cad : il existe I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et une boule de centre M_0 rayon r tels que les points de la surface proches du point M_0 (cad appartenant $B(M_0,r) \cap \Sigma$ avec r assez petit) sont représentés par la paramétrisation de classe C^1 : $(u,v) \in I \times J \mapsto M(u,v)$*

définition 7: point régulier d'une surface définie par éq.cart.

Soit $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ un point de la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$
On dit que le point M_0 est régulier lorsque $\overrightarrow{grad}_{M_0}(F) = \nabla_{M_0}(F) \neq \vec{0}$

théorème 3: plan tangent en un point régulier d'une surface définie par éq.cart.

Soit M_0 un point régulier de la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$. **Alors** :

1. $\overrightarrow{grad}_{M_0}(F) = \nabla_{M_0}(F)$ est un vecteur orthogonal (=normal) à la surface en M_0
2. l'équation du plan tangent en M_0 est donc :

$$\boxed{< \nabla_{M_0}(F),\overrightarrow{M_0M} >= \frac{\partial F}{\partial x}(M_0).(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0).(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0).(z - z_0) = 0}$$

exemple 15:

On considère la surface d'équation $3x^2 - y^2 - 3z^2 = 0$ et le point $M_0(2,3,-1)$

- Cette surface a pour équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ avec $\boxed{\begin{array}{llll} F : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & 3x^2 - y^2 - 3z^2 \end{array}}$
- On a $\nabla(F) =$ donc $\nabla_{M_0}(F) =$ $\neq (0,0,0)$
  Le point M_0 est donc un point régulier de la surface
- Le plan tangent en ce point est le plan qui passe par M_0 et qui a pour vecteur normal
  Il a pour équation cartésienne $\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$ soit
- On peut remarquer que le point $O(0,0,0)$ est un point de la surface mais que ce n'est pas un point régulier car $\nabla_O(F) = (0,0,0)$

exemple 16: la sphère

On considère la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- Cette surface a pour équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ avec $\boxed{\begin{array}{llll} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y^2+z^2-1 \end{array}}$
- On a $\nabla_{(x_0,y_0,z_0)}(F) = (2x_0,2y_0,2z_0)$. On remarque que le gradient est nul ssi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Or le point $(0,0,0)$ n'est pas un point de la surface, on peut donc affirmer que tout point de la surface est un point régulier!
- Soit $M(x_0,y_0,z_0)$ un point de la surface.
  Le plan tangent au point M_0 est le plan qui passe par le point M_0 et qui a pour vecteur normal $2(x_0,y_0,z_0)$, son équation cartésienne est donc $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$
  soit $x_0x + y_0y + z_0z - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 0$.
  Comme M_0 est un point de la surface on a $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, et donc on trouve que le plan tangent a pour équation $\boxed{x_0x + y_0y + z_0z = 1}$

remarque 6

a priori une surface donnée peut être définie mathématiquement soit par une représentation paramétrique, soit par une équation cartésienne. Le choix n'est pas neutre ! Certains problèmes se traitent plus simplement en utilisant une représentation paramétrique, et d'autres en utilisant une équation cartésienne. Sans entrer dans des détails compliqués, retenons que :

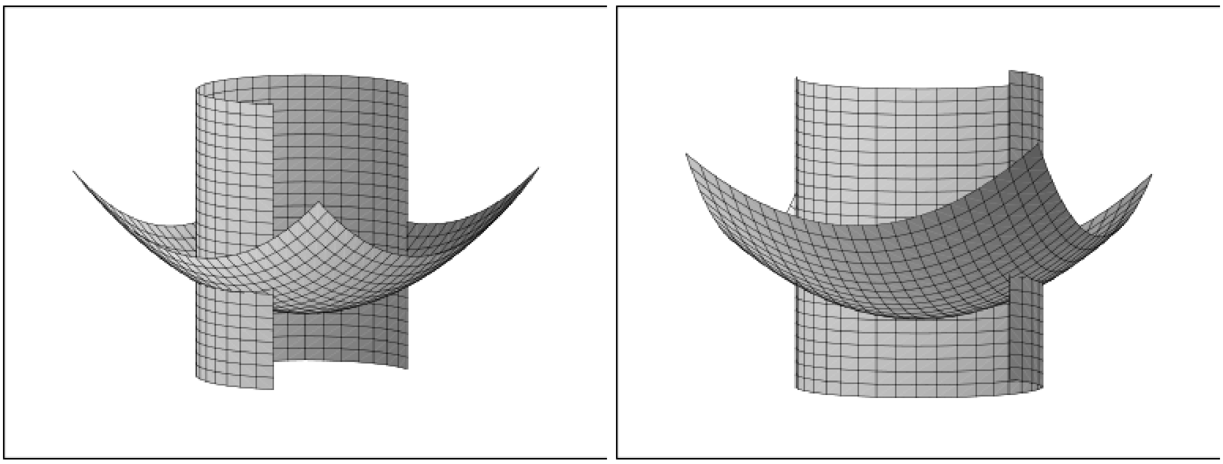
- *pour passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne, on élimine les paramétres et on cherche une égalité qui lie les coordonnées x,y et z*
- *pour passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique, on essaye de deviner des paramètres... parfois x ou y ou z marchent... parfois non...*

proposition 3 (*droite tangente à la courbe intersection de deux surfaces*)

Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces.
On note Γ l'intersection de ces deux surfaces.
Soit $M_0 \in \Gamma$ tel que:

i) M_0 est un point régulier de Σ_1 et de Σ_2
ii) le plan tangent à Σ_1 en M_0 est distinct du plan tangent à Σ_2 en M_0

***Alors:** la droite tangente en M_0 à Γ est l'intersection des deux plans tangents*



5 Surfaces réglées

définition 8: surface réglée

Une surface (Σ) est dite réglée lorsque (Σ) est réunion de droites.

i) ces droites s'appellent les génératrices de la surface (Σ)

ii) une courbe qui coupe toutes les génératrices de (Σ) s'appelle une courbe directrice.

remarque 7

les surfaces réglées sont les surfaces qui admettent un paramétrage du type :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = g(u) + v.h(u) \end{array}} \quad \text{avec :}$$

- *I un intervalle réel*
- *g une fonction de $I \to \mathbb{R}^3$*
- *h une fonction de $I \to \mathbb{R}^3$ ne s'annulant pas sur I.*
- *(I,g) est une paramétrisation d'une courbe directrice*

Une surface réglée est donc une surface qui possède une paramétrisation

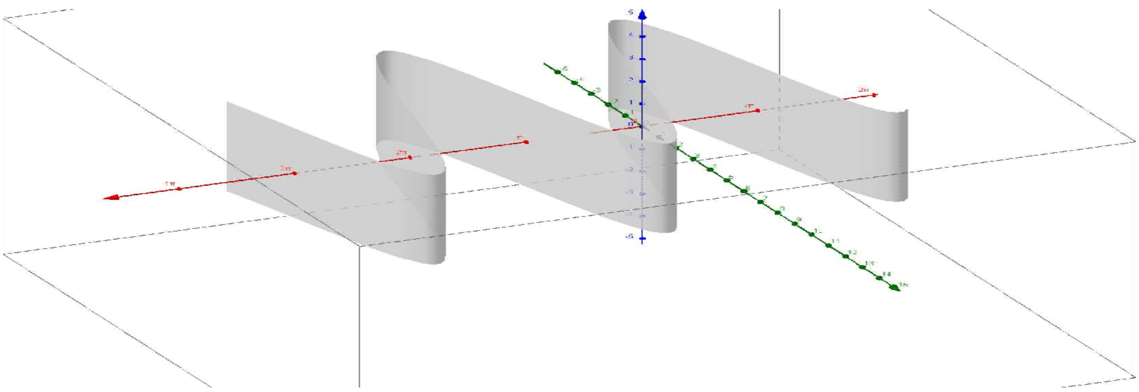
$$\boxed{\begin{array}{rcl} I \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(u,v) = \alpha(u) + v.d_1(u) \\ y(u,v) = \beta(u) + v.d_2(u) \\ z(u,v) = \gamma(u) + v.d_3(u) \end{pmatrix} \end{array}}$$

avec $d = (d_1,d_2,d_3)$ fonction ne s'annulant pas

exemple 17:

On considère la surface Σ d'équation cartésienne $y = \sin x$.
Montrer qu'il s'agit d'une surface réglée.

- On a Σ qui est l'ensemble des points $(x, \sin x,z)$ avec $(x,z) \in \mathbb{R}^2$
- On remarque que c'est l'ensemble des points $M(u,v) = (u, \sin u,v)$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$
- On reconnait la paramétrisation $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(u,v) = & u & + & 0.v \\ y(u,v) = & \sin u & + & 0.v \\ z(u,v) = & 0 & + & 1.v \end{pmatrix} \end{array}}$
- Les génératrices sont toutes dirigées par le même vecteur, c'est à dire le vecteur $\vec{k}$.
- Une courbe directrice est la courbe $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (u, \sin u,0) \end{array}$



remarque 8 (*cylindre, cône (HP)*)

- *une surfaces réglée dont les génératrices sont des droites parallèles est appelée un cylindre.*
- *une surface réglée dont les génératrices passent toutes par un même point est appelée un cône.*

théorème 4: plan tangent en un point régulier d'une surface réglée

Le plan tangent en un point régulier
contient la génératrice passant par ce point. .

exemple 18:

On considère la surface réglée Σ $\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u^2+v(u+1) \\ z &= u+1+vu \end{cases}$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

1. Montrer que le point $A(0,-1,1)$ est un point de la surface
2. Déterminer la génératrice qui passe par le point A
3. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au point A.
4. Montrer que le point $B(2,3,3)$ est sur la même génératrice que A.
5. Les plans tangents en A et B sont-ils identiques?
6. D'une manière générale le plan tangent est-il le même le long d'une génératrice?

exemple 19:

Soit une courbe paramétrée régulière $\Gamma : t \in I \mapsto (\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)) = f(t)$.
On note Σ la réunion des droites tangentes à Γ.

1. Donner une représentation paramétrique de Σ
2. Montrer que le plan tangent est le même en tout point d'une même génératrice

exemple 20:

Soit Σ la surface d'équation $z = \sin(x+y+z)$.
Ecrire l'équation de Σ dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_2 = \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}-\vec{i})$
Que remarque-t-on?

exemple 21:

Soit Σ la surface réglée de courbe directrice $\Gamma(x = a\cos u, y = b\sin u, z = 0)$ avec $u \in [0,2\pi]$ et de génératrices dirigées par $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$. ($a > 0$ et $b > 0$ sont des constantes)

1. Donner une représentation paramétrique de Σ
2. Donner une équation cartésienne de Σ
3. Considérons le nouveau repère $\mathcal{R}(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ avec $\vec{I} = \vec{i}, \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}+\vec{k})$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j}-\vec{k})$.
   Donner l'équation de Σ dans ce nouveau repère .
   A quelle condition la section droite est-t-elle un cercle?
   (On appelle section droite l'intersection de Σ avec un plan orthogonal aux génératrices)

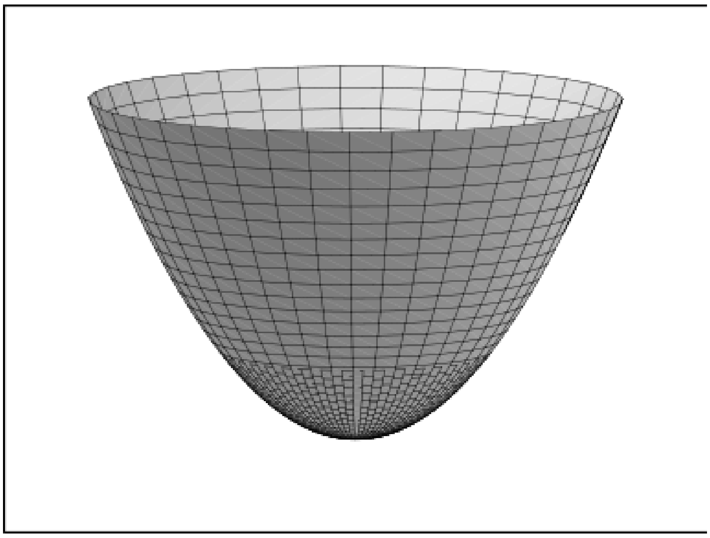
6 Surfaces de révolution

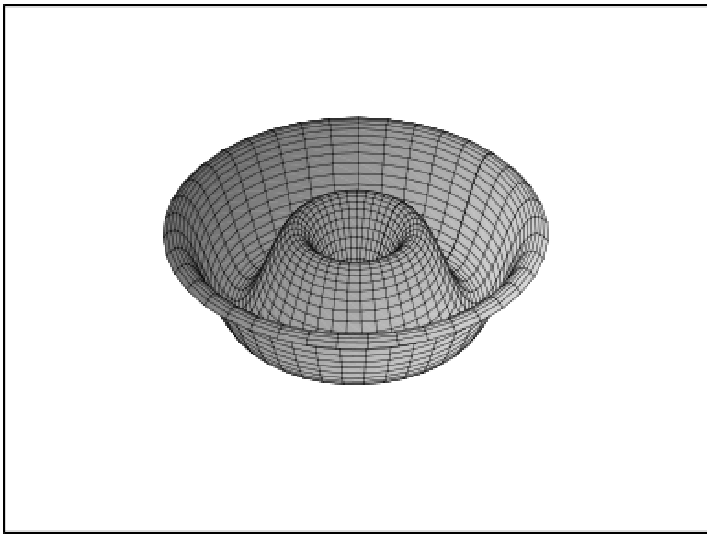
définition 9: surface de révolution

Soit Σ un surface et (D) une droite.
On dit que Σ est une surface de révolution d'axe (D) lorsque l'image de tout point de Σ par toute rotation d'axe (D) appartient encore à Σ, c'est à dire lorsque Σ est globalement invariante par toute rotation d'axe (D)

remarque 9

Une surface Σ est une surface de révolution d'axe D lorsque l'intersection de tout plan perpendiculaire à D avec Σ est soit vide, soit un point de D, soit un cercle centré en D, soit une réunion de cercles centrées en D.

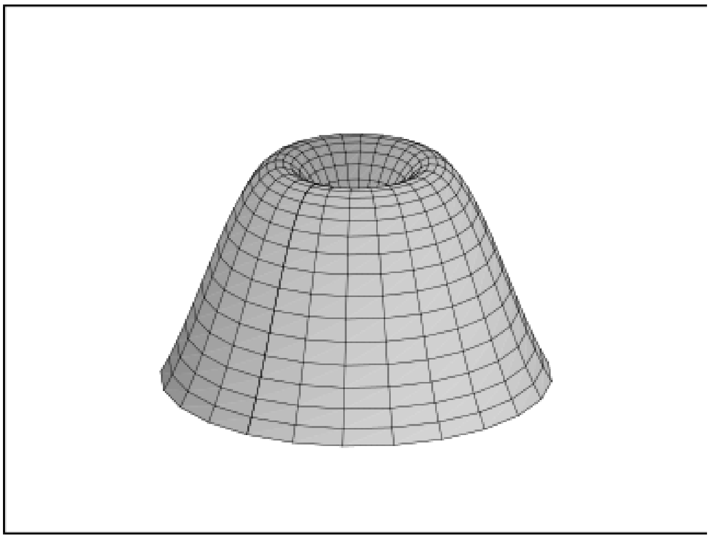


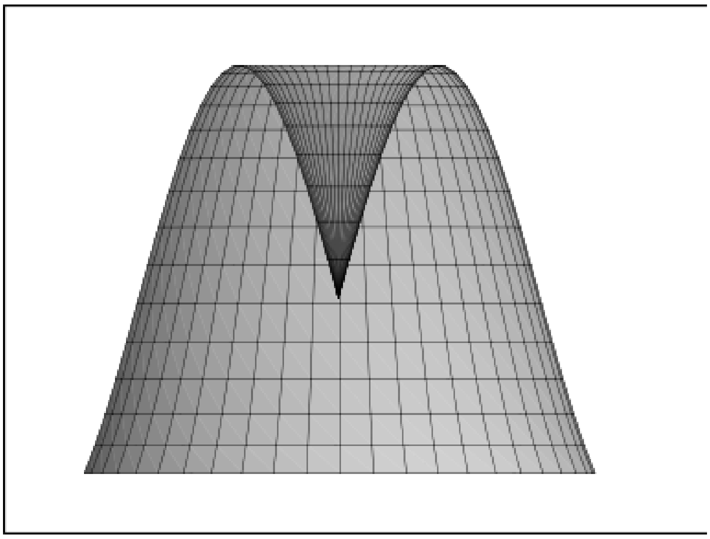


définition 10: parallèles et méridiennes

1. l'intersection de Σ avec un plan orthogonal à (D) est un cercle (si non vide), et s'appelle un parallèle.
2. l'intersection de Σ avec un plan contenant (D) est constituée de deux courbes planes symétriques par rapport à (D), et qu'on appelle une méridienne.

– *une méridienne est composée de deux demi-méridiennes*
– *pourquoi les parallèles s'appellent-ils parallèles ?*





remarque 10 (*Rappel important*)

- *On a vu en algèbre linéaire que la matrice dans la base orthonormée directe* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *de la rotation d'axe* $D = \mathrm{vect}(k)$ *et d'angle* θ *est* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *On en déduit que l'image du point* $M(x,y,z)$ *par la rotation d'axe* (Oz) *et d'angle* θ *est le point* $M'(\cos\theta.x - \sin\theta.y, \sin\theta.x + \cos\theta.y, z)$
  Il suffit pour cela d'effectuer le produit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

exemple 22:

1. Vérifier que la surface d'équation $z^2 + y^2 = 1$ est une surface de révolution.
2. D'une manière plus générale, montrer que toute surface Σ qui possède une équation cartésienne du type $h(x^2 + y^2, z) = 0$ est une surface de révolution d'axe (Oz)

exemple 23:

On souhaite déterminer une représentation paramétrique et une equation cartésienne de la surface obtenue en faisant tourner la parabole $(z = y^2, x = 0)$ autour de l'axe (Oz)

- La parabole ci-dessus sera une méridienne de notre surface,
  sa représentation paramétrique est $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (0,u,u^2) \end{array}}$ notons $P(u)$ le point $(0,u,u^2)$
- Notons $M(u,v)$ l'image du point $P(u)$ par la rotation d'axe (Oz) et d'angle v.
  Notre surface est l'ensemble des points $M(u,v)$, ce qui donne la représentation paramétrique
  $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (-u.\sin v, u.\cos v, u^2) \end{array}}$ soit $\boxed{\begin{cases} x & = -u.\sin v \\ y & = u.\cos v \\ z & = u^2 \end{cases}}$
- Pour déterminer une équation cartésienne, on élimine les paramètres.
  Ici, il est aisé de voir que $\boxed{z = x^2 + y^2}$

exemple 24:

On note $P(u) = (0, 3 + 2\cos u, 2\sin u)$ avec $u \in [0,2\pi]$, et Γ le lieu des $P(u)$.
On note Σ la surface de révolution d'axe (Oz) et de demi-méridienne Γ.

1. Reconnaître Γ, puis Σ.
2. Donner une représentation paramétrique de Σ

exemple 25:

On considère la surface Σ d'équation cartésienne $y^2 - 3z^2 - 4xz + x + 2z = 0$.
On note D la droite qui passe par O et dirigée par le vecteur $\vec{i} + 2\vec{k}$.
On souhaite montrer que Σ est une surface de révolution d'axe D

1. (a) Calculer $x^2 + y^2 + z^2 - (x + 2z)^2 + (x + 2z)$
   (b) En déduire la nature de l'intersection de Σ avec un plan d'équation $x + 2z = ctse$.
   (c) Conclure
2. (a) Déterminer un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tel que $\vec{e}_3$ soit un vecteur directeur de D
   (b) Montrer que l'équation de Σ dans ce nouveau repère est $X^2 + Y^2 - 4Z^2 + \sqrt{5}Z = 0$
   (c) Montrer que Σ est la réunion de cercles centrés sur la droite D et tracées dans des plans perpendiculaires à D. Conclure

7 Compléments: fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ pour $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$

Nous allons donner les définitions et les résultats pour $(p,n) = (2,3)$: ils se généralisent facilement à d'autres valeurs de (p,n)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
On pourra donc écrire f sous la forme $\boxed{\begin{array}{lcl} f : U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (f_1(u,v),f_2(u,v),f_3(u,v)) \end{array}}$
Les fonctions f_1, f_2 et f_3 s'appellent les fonctions coordonnées de f.

définition 11:

On dit que la fonction f est bornée sur U lorsque $\exists M > 0, \forall w \in U, ||f(w)|| \leqslant M$
On montre que l'on a l'équivalence:

$$f \text{ est bornée sur } U \iff \text{ chaque fonction coordonée } f_i \text{ est bornée sur } U$$

définition 12:

Soit $l = (l_1,l_2,l_3) \in \mathbb{R}^3$ et a un point adhérent de U.
On dit que f possède en a la limite l, et on note $\lim\limits_{w \to a} f(w) = l$ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall w \in U, ||w - a|| \leqslant \eta \Rightarrow ||f(w) - l|| \leqslant \epsilon$$

On montre que l'on a l'équivalence:

$$\lim_{w \to a} f(w) = l \iff \forall i \in \{1,2,3\}, \lim_{w \to a} f_i(w) = l_i$$

définition 13:

i) Soit $a \in U$. On dit que f est continue au point a lorsque $\lim\limits_{w \to a} f(x) = f(a)$
c'est à dire : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall w \in U, ||w - a|| \leqslant \eta \Rightarrow ||f(w) - f(a)|| \leqslant \epsilon$

ii) On dit que f est continue sur U lorsque f est continue en tout point de A
On montre que l'on a l'équivalence:

$$f \text{ est continue en } a \text{ [sur } U] \iff \text{ chaque } f_i \text{ est continue en } a \text{ [sur } U]$$

définition 14: définition similaire pour la dérivée suivant la seconde variable

On dit que la fonction f possède une dérivée partielle en $a = (a_1,a_2) \in U$ suivant la première variable lorsque la fonction $u \mapsto f(u,a_2)$ est dérivable en a_1,
c'est à dire lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a_1 + h,a_2) - f(a_1,a_2)}{h}$ existe et est finie. On a la note $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$ ou $\partial_1 f(a)$

On montre que l'on a l'équivalence:

$$\partial_1 f(a) \text{ existe } \iff \forall i \in \{1,2,3\}, \partial_1 f_i(a) \text{ existe}$$

et que dans ce cas $\partial_1 f(a) = (\partial_1 f_1(a),\partial_1 f_2(a),\partial_1 f_3(a))$

remarque 11

Les définitions des fonctions C^1 et C^2 sont celles que nous attendons.
Leurs caractérisations à l'aide des fonctions coordonnées est également sans surprise!