ISOMETRIES VECTORIELLES

Table des matières

exemple 1: rappel important: produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour tous $\vec{x} = (x_1, \ldots ,x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots ,y_n)$, on pose

$$< \vec{x},\vec{y} >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Alors, $< , >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. C'est celui que l'on utilise usuellement.

Remarque:

- *il est d'usage d'identifier $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices unicolonnes correspondant, c'est à dire que l'on identifiera le vecteur $\vec{x} = (1,2,3)$ et la matrice $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$*
- *de même il est d'usage d'identifier l'ensemble des matrices monocoefficients $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, c'est à dire que l'on identifiera la matrice (4) avec le réel 4*
- *avec ces usages, on peut alors écrire avec le produit scalaire usuel*

$$< \underbrace{(1,2,3)}_{\vec{x}}, \underbrace{(2,-1,1)}_{\vec{y}} >= 3 = (3) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{{}^tX} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Y} = {}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 Rappels

théorème 1: dans une bon les coordonnées sont données par un produit scalaire

Soit $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormale de E.

– La décomposition d'un vecteur $\vec{x}$ de E dans la $\mathcal{B}_0$ est donnée par la formule

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = <\vec{x}, \vec{e}_1> \vec{e}_1 + \cdots + <\vec{x}, \vec{e}_n> \vec{e}_n}$$

– Si $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ est une base de E, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} <\vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_1> & \dots & <\vec{\varepsilon}_j, \vec{e}_1> & \dots & <\vec{\varepsilon}_n, \vec{e}_1> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_i> & & <\vec{\varepsilon}_j, \vec{e}_i> & & <\vec{\varepsilon}_n, \vec{e}_i> \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ <\vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_n> & \dots & <\vec{\varepsilon}_j, \vec{e}_n> & \dots & <\vec{\varepsilon}_n, \vec{e}_n> \end{pmatrix} = (<\vec{\varepsilon}_j, \vec{e}_i>))_{1 \leqslant i,j, \leqslant n}$$

théorème 2:

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien et F un sev de E. On a :

i) $F \oplus F^\perp = E$

ii) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

iii) $(F^\perp)^\perp = F$

dans $\mathbb{R}^2$, l'orthogonal d'une droite est un droite
dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'une droite est un plan, et réciproquement

2 Expression matricielle du produit scalaire

lemme 1

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\boxed{A = B \iff \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAY = {}^tXBY}$$

Dans cette démonstration on a montré que $\boxed{{}^tXAY = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j}$ où $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

définition 1: matrice du produit scalaire

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base (pas forcément orthonormale) de E.
On appelle matrice du produit scalaire $< , >$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice symétrique réelle S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est $<\vec{e}_i, \vec{e}_j>$.
On a ainsi $\boxed{S = (<\vec{e}_i, \vec{e}_j>)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$
grâce aux propriétés du ps, la matrice est forcément symétrique réelle

exemple 2:

Considérons $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du ps $<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Vérifier que la matrice du produit scalaire dans la base $(1,X,X^2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

exemple 3:

Soit $E=\mathbb{R}^2$ muni du psu $<\,,\,>$.
Déterminer la matrice du produit scalaire $<\,,\,>$ dans la base $((1,1),(1,2))=(\vec{i}+\vec{j},\vec{i}+2\vec{j})$

exemple 4:

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On va montrer qu'il n'existe pas de ps sur $E=\mathbb{R}^2$ tel que A soit la matrice de ce produit scalaire en tenant un raisonnement par l'absurde.
On suppose qu'il existe une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice du ps $<\,,\,>$ est A.

1. Calculer $||\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2||^2$ pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$
2. Aboutir à une contradiction

rem: d'une manière générale on montre que A est la matrice d'un produit scalaire ssi A est une matrice symétrique réelle avec toutes ses valeurs propres strictement positives

exemple 5:

Soit $n\geqslant 2$ un entier et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
On identifie dans cet exercice les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices unicolonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Pour tout $(X,Y)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ on pose $\phi(X,Y)={}^tXAY$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique
2. Dans cette question, on prend $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$
   (a) Vérifier que ${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(x+2y)^2+(\lambda-4)y^2$
   (b) En déduire que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ ssi $\lambda>4$
3. Dans cette question, on suppose que A est diagonalisable et on écrit $A=PDP^{-1}$
   (a) Dans le cas particulier où $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sans calculer A, donner un vecteur non nul X tel que $AX=0$ et en déduire que ϕ n'est pas un ps
   (b) Dans le cas général, montrer que si A possède une valeur propre négative ou nulle alors ϕ n'est pas un ps.

théorème 3:

Il y a équivalence entre:

i) la base $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E (pour le produit scalaire $<\,,\,>$)
ii) la matrice de $<\,,\,>$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice I_n

rem : une base peut être orthonormée pour un produit scalaire et pas pour un autre

Voyons maintenant à quoi peut bien nous servir la matrice du produit scalaire!
On adopte les notations suivantes dans toute la suite :
- Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E, et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une base de E
- On note $(x_1,\dots,x_n)$ et$(y_1,\dots y_n)$ les coordonnées respectives de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ et $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$
- Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices unicolonnes associées à $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

théorème 4:

Avec les notations ci-dessus, et en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a:

i) $\boxed{<\vec{x},\vec{y}>= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j <\vec{e}_i,\vec{e}_j>= {}^tXSY}$

ii) Si de plus $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a

$$\boxed{<\vec{x},\vec{y}>= {}^tXY = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} <\vec{x},\vec{e}_i> . <\vec{y},\vec{e}_i>}$$

et

$$\boxed{||\vec{x}|| = \sqrt{{}^tXX} = ||X|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} <\vec{x},\vec{e}_i>^2}}$$

Dans une base orthonormée, le produit scalaire s'exprime comme le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$!

exemple 6: la seule valeur propre réelle possible d'une matrice antisymétrique est 0

Soit A une matrice antisymétrique réelle d'ordre n.
On suppose que A possède une valeur propre réelle λ, et on note X un vecteur propre associé.
En calculant de deux manières différentes ${}^tX{}^tAAX$, montrer que $\lambda = 0$

exemple 7: très classique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que $\ker(A^TA) = \ker A$
1. Montrer l'inclusion évidente.
2. Soit $X \in \ker(A^TA)$. Déterminer $||AX||^2$ et conclure
3. En déduire que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^TA$

théorème 5:

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une **base orthonormée** de E, et f un endomorphisme de E.
1. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\boxed{a_{ij} =< f(\vec{e}_j),\vec{e}_i>}$
2. On a pour tout $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E:

$$\boxed{< f(\vec{x}),\vec{y}>= {}^tX{}^tAY \text{ et } <\vec{x},f(\vec{y})>= {}^tXAY} \text{ et } \boxed{< f(\vec{x}),f(\vec{y})>= {}^tX{}^tAAY}$$

rem: à retenir: les coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans une bon sont donnés à l'aide d'un produit scalaire!

3 Isométries vectorielles

définition 2: endomorphisme orthogonal=automorphisme orthogonal=isométrie vectorielle

Soit f un endomorphisme de $(E, < , >)$ euclidien.
On dit que <u>f est une isométrie vectorielle de E</u> lorsque f conserve la norme, c'est à dire lorsque

$$\forall \vec{x} \in E, ||f(\vec{x})|| = ||\vec{x}||$$

on dit aussi que <u>f est un endomorphisme orthogonal de E</u>
ou que <u>f est un automorphisme orthogonal de E</u>

théorème 6:

Soit f un endomorphisme de $(E, < , >)$ euclidien. Il y a équivalence entre :

i) f est une isométrie vectorielle
ii) f conserve le produit scalaire : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, < f(\vec{x}),f(\vec{y}) >=< \vec{x},\vec{y} >$
iii) l'image d'une base orthonormale de E par f est encore une base orthonormale de E
iv) l'image de toute base orthonormale de E par f est encore une base orthonormale de E

On en déduit ainsi qu'une isométrie vectorielle est forcément bijective. . . !

exemple 8: Attention au vocabulaire!

- une projection orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?
- une symétrie orthogonale est-elle un endomorphisme orthogonal ?
- pour éviter toute confusion, on préférera employer la terminologie "isométrie vectorielle"

définition 3: groupe orthogonal de E

On appelle <u>groupe orthogonal de E</u>, et on note $O(E)$, l'ensemble des isométries vectorielles de E

exemple 9:

Décrire $O(E)$ lorsque E est un espace vectoriel de dimension un.
Est-ce un sev? Est-il stable par la loi $\circ$?

théorème 7: structure. . . du groupe orthogonal!

$(O(E),\circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$
c'est à dire que :

i) $O(E) \subset GL(E)\,[\subset \mathcal{L}(E)]$
ii) l'identité est une isométrie vectorielle
iii) la composée de deux isométries vectorielles est encore une isométrie vectorielle
iv) l'inverse d'une isométrie vectorielle est encore une isométrie vectorielle.

rem : le groupe orthogonal $O(E)$ n'est pas un sev de $\mathcal{L}(E)$

théorème 8: sev stable

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien et f une isométrie vectorielle.
Soit F un sev stable par f (càd $f(F) \subset F$). Alors:

i) $f(F) = F$

ii) $F^{\perp}$ est aussi stable par f

iii) il existe une bon de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =$

théorème 9:

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, f un endomorphisme de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
Il y a équivalence entre :

i) f est une isométrie vectorielle de E

ii) A vérifie ${}^tAA = I_n$ (c'est à dire A est une matrice orthogonale)

Autrement dit :

$$\boxed{f \in O(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f \in O_n(\mathbb{R}) \quad \text{(lorsque } \mathcal{B} \text{ est une bon)}}$$

un endomorphisme est une isométrie vectorielle ssi sa matrice dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.

exemple 10:

Ecrivons la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$, dans la base non orthonormale $(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j})$.
On trouve $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. On constate que ce n'est pas une matrice orthogonale.

théorème 10: déterminant et valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal

1. le déterminant d'un endomorphisme orthogonal vaut 1 ou -1.
2. les valeurs propres réelles possibles d'un endomorphisme orthogonal sont 1 et -1

définition 4: vecteurs invariants / anti-invariants - isométrie positive / négative

– Une isométrie vectorielle de déterminant $+1$ est appelé une isométrie vectorielle positive ou encore une rotation
– Une isométrie vectorielle de déterminant -1 est appelé une isométrie vectorielle négative
– On appelle vecteur invariant de f tout vecteur de $\ker(f - id) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = \vec{x}\}$
– On appelle vecteur anti-invariant de f tout vecteur de $\ker(f + id) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$

remarque 1 (***intéressant à retenir***)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
– *f est bijective ssi f envoie une base sur une base.*
– *f est une isométrie vectorielle ssi f envoie une bon sur une bon.*
– *f est une isométrie vectorielle positive ssi f envoie une bond sur une bond.*
– *une isométrie vectorielle positive envoie une base sur une base de même orientation, une isométrie vectorielle négative change l'orientation*

définition 5: Groupe Spécial Orthogonal ou Groupe des Rotations

L'ensemble des isométries vectorielles positives de E s'appelle le groupe spécial orthogonal de E. On le note $SO(E)$.

$$\boxed{SO(E) = \{f \in O(E) |\det(f) = +1\}}$$

théorème 11: structure du....Groupe Spécial Orthogonal

1. l'endomorphisme identité id_E appartient à $SO(E)$
2. $SO(E)$ est stable par la loi de composition $\circ$, càd $\boxed{\forall (f,g) \in (SO(E))^2, f \circ g \in SO(E)}$
3. Si $f \in SO(E)$ alors $f^{-1} \in SO(E)$

rem: $SO(E)$ n'est pas un sev...

exemple 11:

1. Montrer que la composée de deux isométries négatives est une isométrie positive
2. Montrer que la composée d'une isométrie négative et d'une positive est une isométrie négative
3. On compose $a \in \mathbb{N}$ isométries vectorielles positives et $b \in \mathbb{N}$ isométries vectorielles négatives. Qu'obtient-on?

exemple 12:

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien.
On considère deux vecteurs distincts non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de même norme.
Démontrer qu'il existe une unique réflexion qui échange $\vec{a}$ et $\vec{b}$
(Si on note $\vec{n}$ un vecteur normal à l'hyperplan, on commencera par montrer que nécessairement $\vec{n}$ et $\vec{a} - \vec{b}$ sont colinéaires)

4 Matrices orthogonales

définition 6: matrice orthogonale

On dit que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale lorsque

$$\boxed{{}^tA.A = A.{}^tA = I_n}$$

Autrement dit, une matrice est orthogonale si et seulement si elle est inversible et que son inverse est égale à sa transposée: $A^{-1} = {}^tA = A^T$

définition 7: Groupe Orthogonal d'ordre n

On appelle groupe orthogonal d'ordre n, et on note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales carrées d'ordre n.

remarque 2

- *$O(n)$ n'a pas une structure d'espace vectoriel car la matrice nulle n'est pas une matrice orthogonale.*
- *$O(n)$ n'est pas vide car la matrice I_n est une matrice orthogonale*

théorème 12: caractérisation d'une matrice orthogonale à l'aide de ses vecteurs colonnes ou lignes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ses colonnes.
Il y a équivalence entre :

i) A est une matrice orthogonale
ii) A^T est une matrice orthogonale
iii) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \sum_{k=1}^{k=n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} = < C_i, C_j >$
iv) Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire usuel)
v) Les vecteurs lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le p.s.u.)
vi) Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le p.s.u.)
vii) Les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le p.s.u.)

exemple 13:

Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = n$

exemple 14:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \alpha & -\beta \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & \beta \\ 0 & \gamma & 2\beta \end{pmatrix}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de α, β et γ cette matrice est-elle orthogonale?

exemple 15:

Soit A une matrice antisymétrique d'ordre n. On pose $B = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$.
Montrer que B est une matrice orthogonale.

théorème 13: structure du. . . Groupe Orthogonal!

i) la matrice I_n est une matrice orthogonal
ii) $O_n(\mathbb{R})$ est stable par le produit matriciel, c'est à dire que:
le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale
iii) l'inverse d'une matrice orthogonale est encore une matrice orthogonale

théorème 14: déterminants et valeurs propres d'une matrice orthogonale

Si A est une matrice orthogonale **alors** :

i) $\det A = 1$ ou -1
ii) les seules valeurs propres **réelles possibles** de A sont 1 et -1

exemple 16: si $\det A = \pm 1$ **alors** A **n'est pas forcément une matrice orthogonale**

Donner un exemple de matrice de déterminant égal à un mais qui ne soit pas orthogonale.

remarque 3

En revanche, une matrice orthogonale peut possèder des valeurs propres complexes (si l'on s'autorise des vecteurs propres complexes) autres que -1 *et* 1 *; et, on peut affirmer que le module de ces valeurs propres complexes vaut toujours un.*

En effet : Soit $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} neq 0$ *vecteur propre complexe associé à* λ *complexe.* $AX = \lambda X$*,*
donne ${}^t\overline{X}{}^t\overline{A} = \overline{\lambda}{}^t\overline{X}$ *et donc* $|\lambda|^{2t}\overline{X}X = {}^t\overline{X}{}^tAAX$ *car A étant à coefficients réels, on a* $\overline{A} = A$.
De plus, ${}^t\overline{X}{}^tAAX = {}^t\overline{X}X = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 > 0$ *donc* $|\lambda|^2 = 1$.
Par exemple, une base de vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *est* $\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\}$ *associés respectivement aux valeurs propres* $\exp(i\theta)$ *et* $\exp(-i\theta)$

définition 8: Groupe Spécial Orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à un est noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.
On l'appelle le groupe spécial orthogonal.

$$\boxed{SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) |\det A = +1\}}$$

théorème 15: structure du....Groupe Spécial Orthogonal

i) $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
ii) la matrice I_n appartient à $SO_n(\mathbb{R})$
iii) $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par le produit matriciel: $\boxed{\forall (A,B) \in (SO_n(\mathbb{R}))^2, AB \in SO_n(\mathbb{R})}$
iv) Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$
rem: $SO_n(\mathbb{R})$ *n'est pas un sev... mais est stable par le produit interne et le passage à l'inverse.*

théorème 16:

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien donné, et $\mathcal{B}_0$ une base orthonormée de E.
Il y a équivalence entre:
i) $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E
ii) la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale

remarque 4 (*précision sur le théorème précédent*)

- *la matrice de passage d'une bon directe à une bon directe est une matrice de* $SO(n)$
- *la matrice de passage d'une bon directe à une bon indirecte est une matrice orthogonale de determinant* -1

5 Espace euclidien orienté

- Orienter un espace c'est privilégier une base $\mathcal{B}_0$ de cet espace et la déclarer comme directe.
- On dira ensuite qu'une autre base $\mathcal{B}$ est directe [resp. indirecte] lorsque la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ a un déterminant positif [resp. négatif]
- Orienter une droite vectorielle revient donc à choisir un vecteur directeur de cette droite
- Pour $E = \mathbb{R}^2$, on a décidé que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i},\vec{j}) = ((1,0),(0,1))$ était directe
- Pour $E = \mathbb{R}^3$, on a décidé que la base canonique $\mathcal{B}_0 = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ était directe

remarque 5 (*orientation d'un sev*)

Nous allons décrire uniquement un cas particulier.
Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien orienté de dimension 3.
Soit P un plan vectoriel inclus dans E.
On sait que $P^\perp = D$ est une droite.
Notons $\vec{e}_1$ un vecteur unitaire de D. (la droite D est maintenant orientée par le vecteur $\vec{e}_1$)
Soit $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une bon de P
On dira que $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base directe de P lorsque $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base directe de E.

6 Description du groupe orthogonal en dimension 2

théorème 17: classification des isométries vectorielles en dim 2

Dans un espace euclidien de dimension deux,
il existe deux et seulement deux types d'isométries vectorielles:

1. les rotations
2. les réflexions (=symétrie orthogonale par rapport à une droite)

théorème 18: classification des matrices orthogonales d'ordre deux

Il existe deux et seulement deux types de matrices orthogonales d'ordre 2:

1. celles du type $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
2. celles du type $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

démonstration: Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

– on rappelle que pour deux réels fixés x et y on a l'équivalence

$$x^2 + y^2 = 1 \iff |x+iy| = 1 \iff \exists\theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & = \cos\theta \\ y & = \sin\theta \end{cases}$$

– Le calcul donne ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$

– On a ainsi

$${}^tAA = I_2 \iff \exists(\theta,\theta_1) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } c = \sin\theta \\ b = \cos\theta_1 \text{ et } d = \sin\theta_1 \\ \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1 = 0 \end{cases}$$

C'est à dire $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\theta_1 \\ \sin\theta & \sin\theta_1 \end{pmatrix}$ avec $\cos(\theta_1 - \theta) = 0$

Or

$$\cos(\theta_1 - \theta) = 0 \iff \theta_1 - \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Et dans ce cas

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \cos(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -(-1)^k\sin(\theta) \\ \sin\theta_1 = \sin(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k\cos(\theta) \end{cases}$$

On trouve bien les deux formes annoncées dans le théorème

exemple 17: utilisation des vec.invariants / décomposition en composée de réflexions

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace euclidien de dimension deux et $f \in O(E)$.
Nous voulons montrer que f peut s'écrire comme la composée d'au plus deux réflexions.
On note $E_1 = \ker(f - id) = \{\vec{x} \in E | f(\vec{x}) = \vec{x}\}$

1. Etudier le cas où $\dim E_1 = 2$
2. cas où $\dim E_1 = 1$. Soit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ une bon de E telle que $\vec{e}_1$ dirige E_1.
   (a) Que vaut nécessairement $f(\vec{e}_2)$?
   (b) Conclure.
3. cas où $\dim E_1 = 0$. Soit $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$. On note r la réflexion qui échange $\vec{x}_0$ et $f(\vec{x}_0)$
   (a) On note $g = r \circ f$. Montrer que $g \in O(E)$ et que $\dim E_1(g) = 1$
   (b) Conclure

remarque 6 (*A mémoriser*)

Soit f une isométrie vectorielle de E, avec $\dim E = 2$.

– *f est une rotation d'angle NON nul ssi le seul vecteur invariant est $\vec{0}$*
– *f est une réflexion ssi l'ensemble des vecteurs invariants est une droite*
– *f estl'identité (rotation d'angle nul) ssi tout vecteur de E est invariant*

théorème 19: propriétés d'une rotation

Soit f une rotation d'angle NON nul. Alors:

1. l'ensemble des vecteurs invariants de f est réduit à $\{\vec{0}\}$
2. $\det f = 1$ (càd f est une isométrie positive)
3. Dans toute bond de E, f a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est l'angle de la rotation

rem: La matrice d'une rotation est donc indépendante de la bond choisie
rem: l'endomorphisme identité correspond à la rotation d'angle nul

théorème 20: propriétés des réflexions

Soit f la réflexion d'axe $D = \vec{u}$. Alors:

1. L'ensemble des vecteurs invariants(E_1) est de dimension 1, c'est la droite D
2. $\det f = -1$ (càd f est une isométrie négative)
3. Il existe une bond de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

rem: pour une réflexion, la matrice dépend de la bond choisie

exemple 18:

Donner la matrice de:

1. la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans une bond, puis dans une bon indirecte.
2. la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta = Vect((1,1))$

exemple 19:

Montrer les résultats suivants:

1. la composée de deux rotations est encore une rotation: $R_\theta.R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$
2. la composée de deux réflexions est une rotation: $S_\theta.S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$
3. la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion: $S_\theta.R_{\theta'} = S_{\theta+\theta'}$ et $R_\theta.S_{\theta'} = S_{\theta'-\theta}$
4. retrouver le fait qu'une rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions
   (On commencera par écrire la rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ comme la composée de deux réflexions)

7 Description du groupe orthogonal en dimension 3

théorème 21:

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Il y a équivalence entre:

i) A est une matrice orthogonale(càd $A \in O_3(\mathbb{R})$)

ii) la matrice A est semblable avec une matrice de passage orthogonale à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon \in \{-1, +1\}$$

- *dans la démonstration, on utilisera le fait qu'un polynôme de degré trois à coefficients réels possède toujours au moins une racine réelle.*
- *avec les notations précédentes, on a* $\det A = \varepsilon$
- *Lorsque* $\theta = 0$ *ou* π *on a les matrices particulières*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

théorème 22: classification des isométries vectorielles en dimension trois

Dans un espace de dimension trois, il existe 3 et seulement 3 types d'isométries vectorielles:

1. les rotations (ce sont comme toujours les isométries positives)
2. les réflexions
3. les anti-rotations: les composées d'une réflexion et d'une rotation, l'axe de la rotation (d'angle non nul) étant orthogonale au plan de la réflexion

rem: les types 2 et 3 (qui constituent les isométries négatives) pourraient être regroupés dans un unique type (à savoir composée d'une réflexion et d'une rotation avec axe de la rotation orthogonal au plan de la réflexion) si l'on considère une rotation d'angle éventuellement nul.

théorème 23: propriétés d'une réflexion dans l'espace

Soit f une réflexion. Alors:

1. L'ensemble des vecteurs invariants ($E_1(f)$) est de dimension 2, c'est le plan par rapport auquel se fait la symétrie orthogonale
2. $\det f = -1$
3. Il existe une bond $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de E dans laquelle la réflexion a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   où $(\vec{u},\vec{v})$ est une bon du plan $E_1(f)$ et $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite orthogonale à ce plan, c'est à dire un vecteur directeur de $E_{-1}(f)$

exemple 20:

Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la réflexion par rapport au plan d'éq. $x + 2y - z = 0$

définition 9: rotation dans l'espace

Soit θ un réel et $D = \text{vect}(\vec{w})$ une droite(orientée) de E.
On appelle rotation d'axe D et d'angle θ, et on note $r_{D,\theta}$, l'unique endomorphisme de E définie de la manière suivante:

1. $r_{D,\theta}(\vec{w}) = \vec{w}$ *(la restriction de $r_{D,\theta}$ à la droite D est l'identité)*
2. la restriction de $r_{D,\theta}$ au plan $D^{\perp}$ est la rotation d'angle θ dans le plan $D^{\perp}$

- *L'identité est une rotation particulière, c'est la rotation d'angle nul.*
- *La rotation d'axe (D) et d'angle π est encore appelé retournement d'axe (D)*
- *La rotation d'axe $\text{vect}(\vec{w})$ et d'angle θ est aussi la rotation d'axe $\text{vect}(-\vec{w})$ et d'angle $-\theta$*

théorème 24: propriétés d'une rotation (d'angle non nul) dans l'espace

Soit f une rotation d'angle NON nul. Alors:

1. L'ensemble des vecteurs invariants(E_1) de f est une droite vectorielle, qui n'est autre que l'axe de la rotation.
2. $\det f = 1$
3. Il existe une bond $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de E dans laquelle la rotation a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   où $\vec{w}$ est un vecteur directeur de l'axe de la rotation, $(\vec{u},\vec{v})$ est une bond du plan orthogonal à l'axe de la rotation et θ est l'angle de la rotation

exemple 21: rotation=produit de deux réflexions

On considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une bond de E.
On note :

- $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$
- $\vec{n}_2 = \cos\alpha.\vec{e}_1 + \sin\alpha.\vec{e}_2$ où α est un réel fixé.
- P_1 [resp. P_2] le plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ [resp. $\vec{n}_2$]
- s_1 [resp. s_2] la réflexion par rapport au plan P_1 [resp. P_2]

1. Ecrire les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de s_1, s_2 et $s_2 \circ s_1$
2. Reconnaitre l'isométrie vectorielle $s_2 \circ s_1$

exemple 22:

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu,
on considère $\vec{\omega}$ un vecteur unitaire et l'application $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x} + < \vec{\omega},\vec{x} > \vec{\omega}$

1. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal
2. Ecrire la matrice de f dans une bond bien choisie, et en déduire la nature de f

théorème 25: propriétés d'une anti-rotation

Soit θ un réel NON nul, P un plan et $D = P^{\perp}$ la droite orthogonale à P.
Notons s la réflexion par rapport à P et r la rotation d'axe D est d'angle θ
On considère $f = s \circ r$ Alors:

1. $f = s \circ r = r \circ s$ est un endomorphisme orthogonal de E
2. L'ensemble des vecteurs invariants de f est réduit au vecteur nul
3. $\det f = -1$
4. Le sep associé à la valeur propre -1 est de dimension 1 (si $\theta \neq \pi$), c'est l'axe de la rotation
5. Il existe une bond $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $\vec{w}$ est un vecteur directeur de l'axe de la rotation, $(\vec{u},\vec{v})$ est une bond du plan orthogonal à l'axe de la rotation et θ est l'angle de la rotation

remarque 7

- *La composée d'une réflexion et d'une rotation est soit une réflexion soit une anti-rotation.(en particulier si l'axe de la rotation est inclus dans le plan de la réflexion, la composée est une réflexion)*
- *La composée de deux rotations est toujours une rotation*
- *La composée de deux réflexions est une rotation*

exemple 23:

L'endomorphisme $f = -id_{\mathbb{R}^3}$ est une isométrie vectorielle. De quel type?

méthode 1: Etudier l'isométrie canoniquement associée à une matrice $A \in O_3(\mathbb{R})$

- $\det A$ nous dit si c'est une isométrie vectorielle positive ou négative
- la dimension de $E_1(A)$ nous indique la nature précise de l'isométrie
- $\boxed{\operatorname{tr} A = 2\cos\theta + \varepsilon}$ nous donne θ au signe près.
- pour déterminer θ, on choisit un vecteur unitaire $\vec{w}$ qui dirige l'axe de la rotation, puis un vecteur $\vec{u}$ unitaire orthogonal à $\vec{w}$ et l'on calcule $\vec{u} \wedge f(\vec{u})$ ou bien $< f(\vec{u}),\vec{v} >$ ou $\det(\vec{u},f(\vec{u}),\vec{w})$ (avec $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u}$, et donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une bond bien adaptée)

exemple 24:

reconnaître la nature et les éléments de l'application linéaire f canoniquement associée aux matrices

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

exemple 25:

On considère s, la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\operatorname{vect}\vec{n})^\perp$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire donnée. Une base orthonormale $\mathcal{B}$ étant fixée, on note N la matrice unicolonne des coordonnées de $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est $I - 2N^tN$
2. application: On suppose que $\dim E = 3$ et on note $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une bon de E.
   On considère le plan d'équation $x + y - 2z = 0$.
   Ecrire la matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de la réflexion par rapport au plan P

exemple 26: les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$

Soit F un sev de $\mathbb{R}^3$.
On considère s la symétrie orthogonale par rapport à F, c'est à dire l'application

$$\boxed{\begin{array}{rcl} s : \mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_{F^\perp} & \longmapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_{F^\perp} \end{array}}$$

Faire les différents schémas suivant $\dim F$

8 Matrices symétriques réelles

théorème 26: propriétés des matrices symétriques réelles

Soit M une matrice symétrique réelle.(càd $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$) **Alors** :

i) les valeurs propres de M sont toutes réelles.

ii) les sous-espaces propres de M sont orthogonaux deux à deux.

iii) M est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

C'est à dire : $\boxed{\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists D \text{ diagonale}, M = PDP^{-1}}$

les matrices symétriques complexes ne vérifient pas cette propriété

exemple 27:

Démontrer le théorème ci-dessus dans le cas où $n = 2$

exemple 28:

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3+i & 5 & 4 \\ 5 & 1+i & -1 \\ 4 & -1 & -2+i \end{pmatrix}$ est inversible.

exemple 29:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. Soit M une matrice symétrique réelle telle que $M^{2018} = I_n$. Que dire de M^2 ?
4. Soit M une matrice symétrique réelle telle que $M^{2017} = I_n$. Que dire de M ?

exemple 30:

Soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -4 \\ 2 & 26 & 2 \\ -4 & 2 & 23 \end{pmatrix}$. $\underline{\text{(On trouve } \chi_A(X) = X^3 - 8X^2 + 21X - 18 = (X-2)(X-3)^2.)}$

Diagonaliser A en utilisant une matrice orthogonale de déterminant positif.

(Sera-ce plus simple de déterminer déjà E_3 ou E_2 ?)

EXEMPLE 15 - ESPACES EUCLIDIENS

– Pour montrer que B est une matrice orthogonale, il suffit de montrer que ${}^tBB = I_n$
  On utilisera le fait que pour une matrice M inversible on a $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$

– On a ${}^tB = {}^t((I_n + A)(I_n - A)^{-1}) = {}^t((I_n - A)^{-1}).{}^t(I_n + A) = ({}^t(I_n - A))^{-1}.(I_n + {}^tA)$
  Comme A est une matrice antisymétrique on a ${}^tB = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$

– Commençons par remarquer que $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2 = (I_n + A)(I_n - A)$

– ${}^tBB = \left[(I_n + A)^{-1}(I_n - A)\right]\left[(I_n + A)(I_n - A)^{-1}\right] = (I_n + A)^{-1}\left[(I_n - A)(I_n + A)\right](I_n - A)^{-1}$

  grâce à l' associativité du produit matriciel, et ensuite:

  ${}^tBB = (I_n + A)^{-1}\left[(I_n + A)(I_n - A)\right](I_n - A)^{-1} = \left[(I_n + A)^{-1}(I_n + A)\right]\left[(I_n - A)(I_n - A)^{-1}\right]$

  Ainsi ${}^tBB = I_n.I_n = I_n$ (cqfd!)