Covariance, résultats asymptotiques

Dans tout ce polycopié, on sera placé dans un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$

théorème 1: Rappels de certains résultats

Soit X étant une vard sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$

1. X possède une variance ssi X^2 possède une espérance
2. si X possède une variance alors X possède une espérance
3. Dans le cas où X possède une espérance,
   la va $X - E(X)$ est une va dite centrée, càd d'espérance nulle
4. $V(X) = 0$ ssi X est constante sauf éventuellement sur un ensemble négligeable
5. Deux va qui suivent la même loi possèdent la même variance et la même espérance.

théorème 2: admis

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.
Si X^2 et Y^2 admettent des espérances finies alors XY admet une espérance finie.

rappel: dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finies, l'espérance et la variance existent toujours
Dans la preuve, on utilise l'inégalité $|XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ qu'il faut savoir redémontrer

définition 1: covariance

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux v.a.r. discrètes qui admettent des variances.
On appelle covariance de X et de Y, et on note $\text{cov}(X,Y)$ la quantité

$$\boxed{\text{cov}(X,Y) = E\left((X - E(X)).(Y - E(Y))\right)}$$

rem: la covariance est l'espérance du produit des deux variables préalablement centrées.

théorème 3: Formule de Koenig-Huygens

Lorsque la covariance de X et de Y existe, on a

$$\boxed{\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Pour plus de clarté dans la démonstration, nous noterons $\mu_X = E(X)$ et $\mu_Y = E(Y)$.
Par linéarité de l'espérance, on peut écrire

$$\begin{aligned}\text{cov}(X,Y) &= E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) \\ &= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X\mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X\mu_Y \underbrace{E(1)}_{=1} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

méthode 1: comment calculer la covariance de 2 va

Notons $X(\Omega)=\{x_i | i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j | j\in J\}$ ainsi que $\mu_X=E(X)$ et $\mu_Y=E(Y)$.
Le théorème de transfert se généralisant à une fonction de 2 variables, on a en particulier

$$E(XY)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i.y_j.P(X=x_i\cap Y=y_j)$$

et

$$E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y).P(X=x_i\cap Y=y_j)$$

- Le calcul de la covariance se fait donc par le calcul d'une double somme.
- Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, il n'y a pas de problème de convergence!
- Dans le cas particulier classique où $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$, on a

$$E(XY)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} i.j.P(X=i\cap Y=j)$$

exemple 1: ce calcul est à savoir refaire

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. X est le numéro le plus petit et Y est le numéro le plus grand.

Il est facile de montrer que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, P((X=i)\cap(Y=j))=\begin{cases}\dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si } i<j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

On a

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ijP((X=i)\cap(Y=j))\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ijP((X=i)\cap(Y=j))\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} ijP((X=i)\cap(Y=j))\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} ij\frac{2}{n(n-1)}\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} i\sum_{j=i+1}^{n} j\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} i\frac{(n+i+1)(n-i)}{2}\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(n^2+n)i-i^2-i^3\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left[(n^2+2n)\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}\right] = \cdots = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}
\end{aligned}$$

Il est facile de montrer que $E(X)=\dfrac{n+1}{3}$ et $E(Y)=\dfrac{2(n+1)}{3}$

On a alors $\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}-\dfrac{2(n+1)^2}{9}=\dfrac{(n+1)(n-2)}{36}$

exemple 2:

Soit (X,Y) un couple de v.a discrètes dont la loi est donnée par le tableau de gauche suivant:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0.08	0.04	0.16	0.12
2	0.04	0.02	0.08	0.06
3	0.08	0.04	0.16	0.12

$Z \setminus T$	1	2	3	4
1	0.08	0.08	0.24	0.12
2		0.02		
3				

1. Déterminer $\text{cov}(X,Y)$ (on devra trouver 0)
2. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$. Déterminer $\text{cov}(Z,T)$ (on trouvera $E(ZT) = 5.6$ et $\text{cov}(Z,T) = 0.2496$)

théorème 4: lien entre variance et covariance

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes possédant une variance.

i) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la variable aléatoire $aX + bY$ possède une variance et l'on a

$$\boxed{V(aX + bY) = a^2.V(X) + b^2.V(Y) + 2ab.\,\text{cov}(X,Y)}$$

ii) en particulier,

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\text{cov}(X,Y) \quad \text{et} \quad V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\text{cov}(X,Y)}$$

rem: bien sûr, lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, les variances et la covariance existent toujours

théorème 5: cas particulier de va indépendantes

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes** possédant une variance. Alors:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad , \quad \text{cov}(X,Y) = 0 \quad , \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

rem: deux va indépendantes ont une covariance nulle mais la réciproque est fausse!

exemple 3: . . . la réciproque est fausse!

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée.
Soient X la variable prenant pour valeur de nombre de Pile obtenus moins un, et Y la variable prenant pour valeur le nombre de Pile au deuxième lancer moins le nombre de Pile au premier lancer.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y)
2. Calculer la covariance des variables X et Y
3. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

1. On a bien sûr $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	. .	. .	. .
0			
1			

exemple 4: covariance de deux va constantes

Soient X et Y deux va constantes. Calculer $\text{cov}(X,Y)$. Remarque?

exemple 5: ...exemple non contradictoire avec la remarque du théorème 5

Soient X et Y deux va suivant une même loi de bernoulli $\mathcal{B}(p)$
Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $\text{cov}(X,Y) = 0$

1. Par théorème, on sait que si X et Y sont indépendantes alors $\text{cov}(X,Y) = 0$
2. Réciproquement, on suppose que $\text{cov}(X,Y) = 0$
   - Comme X et Y sont des variables de Bernoulli, on a
   $$E(X.Y) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} i.j.P(X = i \cap Y = j) = P(X = 1 \cap Y = 1)$$
   - Comme $\text{cov}(X,Y) = 0$, on sait que $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ c'est à dire
   $$P(X = 1 \cap Y = 1) = p.p = P(X = 1).P(Y = 1)$$
   - Cette seule égalité ne suffit pas par pour conclure que X et Y sont indépendants; cependant, on sait par théorème que si deux événements A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B seront indépendants, A et $\overline{B}$ seront indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ seront indépendants.
   Comme X et Y ne prennent que deux valeurs, on peut **maintenant** affirmer que X et Y sont indépendantes!

théorème 6: Quelques formules à savoir retrouver... produit scalaire?

i) $V(aX) = a^2V(X)$ et $\text{cov}(X,X) = V(X)$

ii) $4\,\text{cov}(X_1,X_2) = V(X_1 + X_2) - V(X_1 - X_2)$

iii) $\text{cov}(X_1,X_2) = \text{cov}(X_2,X_1)$

iv) $V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \text{cov}(X_i,X_j) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \text{cov}(X_i,X_j)$

v) $\text{cov}(\sum_{k=1}^{n} a_kX_k,Y) = \sum_{k=1}^{n} a_k.\text{cov}(X_k,Y)$ et $\text{cov}(Y,\sum_{k=1}^{n} a_kX_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k.\text{cov}(Y,X_k)$

vi) $\text{cov}(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i, \sum_{j=1}^{m} b_jY_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ib_j\,\text{cov}(X_i,Y_j)$

vii) si $X_1,\dots X_n$ sont 2 à 2 indépendantes alors $V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

rem: cov *est une forme bilinéaire symétrique et positive! On a en particulier:*

- $\text{cov}(a.X_1 + b.X_2,Y) = a.\text{cov}(X_1,Y) + b.\text{cov}(X_2,Y)$
- $\text{cov}(X,a.Y_1 + b.Y_2) = a.\text{cov}(X,Y_1) + b.\text{cov}(X,Y_2)$
- $V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2.\text{cov}(X_1,X_2) + 2.\text{cov}(X_1,X_3) + 2.\text{cov}(X_2,X_3)$

définition 2: coefficient de corrélation

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes qui admettent des variances non nulles

On appelle coefficient de corrélation de X et de Y le réel: $\boxed{\rho(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$

exemple 6: variables aléatoires affinement liées

Soit X une va de variance non nulle.
On considère $Y = aX + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ fixé.
Déterminer $\operatorname{cov}(X,Y)$ puis $\rho(X,Y)$ en fonction de $V(X)$

théorème 7: inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes qui admettent des variances non nulles
Alors:

i) $[\operatorname{cov}(X,Y)]^2 \leqslant V(X).V(Y)$ càd $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X).\sigma(Y)$

ii) $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$

iii) $|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement il existe deux réels a et b tels que l'évènement $(Y = aX + b)$ est presque certain, c'est à dire tel que $P(Y = aX + b) = 1$

Quelques remarques:

- *Si les va sont indépendantes alors le coefficient de corrélation est nul*
- *le coefficient de corrélation mesure si deux variables aléatoires sont , presque sûrement, affinement liées ou non*
- *interprétation de* $\operatorname{cov}(X,Y) > 0$*: plus* X *est élevé, plus, en moyenne,* Y *est élevé (et réciproquement)*
- *interprétation de* $\operatorname{cov}(X,Y) < 0$*: plus* X *est élevé, plus, en moyenne,* Y *est petit (et réciproquement)*

démonstration

Soit X une va telle que $V(X) \neq 0$.

Considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & V(\lambda X + Y) \end{array}}$

- Pour tout λ réel on a $f(\lambda) = \lambda^2.V(X) + 2\lambda.\operatorname{cov}(X,Y) + V(Y)$.
  il s'agit d'une fonction polynomiale de degré 2 (car $V(X) \neq 0$) qui est toujours positive sur $\mathbb{R}$ (car une variance est toujours positive): ceci signifie que son discriminant Δ est inférieur ou égal à zéro.
  Or $\Delta = 4\operatorname{cov}^2(X,Y) - 4V(X)V(Y)$.
- On a bien prouvé que $(\operatorname{cov}(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$, ce qui équivaut encore à $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X).\sigma(Y)$
- étude du cas d'égalité

$$\begin{aligned} |\operatorname{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X).\sigma(Y) &\iff \Delta = 0 \\ &\iff \exists! \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda) = 0 \\ &\iff \exists! \lambda \in \mathbb{R}, V(\lambda X + Y) = 0 \\ &\iff \exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda X + Y = \mu \quad \text{avec probabilité un} \end{aligned}$$

exemple 7:

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. X_1 est le premier numéro tiré, X_2 est le second

1. Déterminer la loi de (X_1,X_2) puis les lois de X_1 et de X_2
2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes? Calculer $\rho(X_1,X_2)$.
3. A quelle condition X_1 et X_2 sont-elles presque sûrement liées affinement? Trouver alors la relation les liant!

exemple 8:

Soit X une va possédant une variance

Soient X_1 et X_2 deux va qui suivent la m̂ loi que celle de X et telles que $X_1 + X_2$ suit la loi de la va $2X$.

1. Montrer que $\operatorname{cov}(X_1,X_2) = V(X)$
2. Montrer que $V(X_1 - X_2) = 0$
3. En déduire que $P(X_1 = X_2) = 1$

exemple 9: on pourra se limiter à $n = 4$ dans un premier temps

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ ainsi que $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$

1. Donner $E(S_n)$ et $V(S_n)$
2. Donner la loi de Y_n puis $E(Y_n)\,V(Y_n)$ et $E(V_n)$
3. Démontrer que $\operatorname{cov}(Y_i,Y_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i+1 \\ p^3 - p^4 & \text{si } j = i+1 \end{cases}$
4. Justifier que $V(V_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} p^2(1-p^2) + 2\left(\sum\limits_{1=1}^{n-1} p^3 - p^4\right)$
   puis en déduire que $V(V_n) = p^2 n(1-p)(np+1)$
5. Les plus courageux pourront justifier que $\operatorname{cov}(S_n,V_n) = p^2(1-2n)(p-1)$

exemple 10:

On lance n fois une pièce de monnaie qui a la probabilité p de tomber sur Pile.

On note X le nombre de Piles obtenus et Y le nombre de Faces obtenus.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.

   On souhaite maintenant calculer $\operatorname{cov}(X,Y)$
2. première solution: par le calcul direct et lourd (mais formateur!)
   On a $E(XY) = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n} ijP((X=i)\cap(Y=j))$
   or $P((X=i)\cap(Y=j)) = 0$ lorsque $i + j \neq n$
   donc $E(XY) = \sum\limits_{i=0}^{n} i(n-i)P((X=i)\cap(Y=n-i)) = \dots$
3. deuxième solution: en utilisant la relation $X + Y = n$
   On a alors $E(XY) = \dots$

4. troisième solution: en utilisant le fait que l'on peut dire que $\rho(X,Y) =$