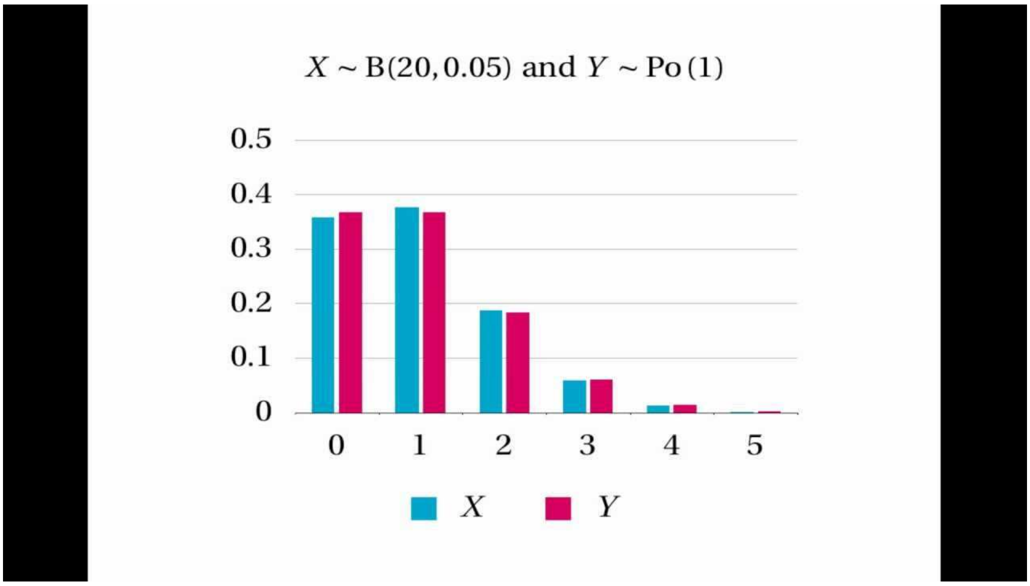
Variables aléatoires discrètes II

Table des matières



théorème 1: convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson (rappel)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(n,p_n)$
On suppose que (p_n) est une suites de réels dans $]0,1[$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$
Dans la pratique, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n \geq 30$ et $np \leq 5$

la démonstration est dans le poly variable aléatoire 1

1 Un théorème peu utilisé

théorème 2: existence de variable aléatoire (admis, peu important en pratique)

Soit Ω un univers muni de la tribu $\mathcal{T}$)
Soit $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable (les éléments sont 2 à 2 distincts.)
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum\limits_{n\geq 0} p_n = 1$

Alors il existe une probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{T})$ et une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ à valeurs dans $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = x_n) = p_n$

rem ce théorème sera très très peu utilisée

exemple 1:

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. On considère pour tout $n \geqslant 1, p_n = \lambda.e^{-n}$.
Montrer que, pour un choix judicieux de λ, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi $(p_n)_{n\geqslant 1}$, càd telle que $\forall n \geqslant 1, P(X = n) = p_n$

2 Espérance

On veut généraliser la notion d'espérance d'une variable aléatoire réelle que vous avez vue l'année dernière dans le cas où $X(\Omega)$ était un ensemble fini.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots ,x_n\}$ vous aviez posé $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.P(X = i)$ ce que l'on pouvait encore écrire

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x.P(X = x).$$

On souhaite donner de l'espèrance aux variables aléatoires ayant un ensemble image $X(\Omega)$ dénombrable! Mais les choses ne sont plus aussi simples car nous aurons affaire à une somme avec une infinité de termes, c'est à dire une série.

définition 1: espérance lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r telle que $X(\Omega) = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ soit dénombrable.

On dit que la var X est *d'espérance finie ou admet une espérance* lorsque la série de terme général $x_n.P(X = x_n)$ est **absolument convergente**.

Dans ce cas, on appelle <u>espérance de X</u>, et on note $E(X)$ le réel $\boxed{E(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n.P(X = x_n)}$

rem: dans le cas courant où $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, on s'intéresse donc à $\sum n.P(X = n)$
rem: lorsque $X(\Omega)$ est fini, la var possède toujours une espérance!

remarque 1

- *Pourquoi avoir imposé l'absolue convergence de la série plutôt que simplement la convergence? Un théorème cité dans le chapitre sur les séries numériques indique qu'une série absolument convergente est commutativement convergente (c'est à dire que l'ordre de sommation, donc ici l'étiquettage de nos événements, ne change pas la valeur de la somme). On peut donc noter également* $\boxed{E(X) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x.P(X = x)}$
- *On rappelle que la série de terme général u_n est ACV lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.*
- *Certaines valeurs aléatoires ne possèdent pas d'espérance*

méthode 1: comment montrer qu'une v.a. possède une espérance

- Si $X(\Omega)$ est fini, l'espérance existe toujours! Il n'y a rien à prouver!
- Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, on étudie l'ACV de la série $\sum x_n.P(X = x_n)$

exemple:

1. *Montrer que la série de terme général $\frac{4}{n(n+1)(n+2)}$ pour $n \geqslant 1$ converge et que sa somme vaut 1*
2. *On considère la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \geqslant 1, P(X = n) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$.*
   Montrer que X est d'espérance finie, et donner $E(X)$
3. *La variable aléatoire $Y = X^2$ possède-t-elle une espérance finie?*

théorème 3: théorème de transfert-admis

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ soit dénombrable.
Soit g une fonction définie (au moins) sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles.
Alors:

i) la var $g(X)$ est d'espérance finie $\Longleftrightarrow$ la série $\sum g(x_n).P(X = x_n)$ est absolument convergente

ii) et dans ce cas $E(g(X)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g(x_n).P(X = x_n)$

rem: dans le cas particulier courant où $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, on a donc

- *la var $g(X)$ est d''espérance finie $\Longleftrightarrow$ la série $\sum g(n).P(X = n)$ est absolument convergente*
- *et dans ce cas, $E(g(n)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g(n).P(X = n)$*

exemple 2:

Soit X une v.a qui suit une loi de Poisson, et $Y = (X - 5)^2$
On sait donc que:

i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$

Le théorème de transfert nous permet d'affirmer que:

- *Y possède une espérance **ssi** la série de terme général $(n-5)^{\cdot} P(X = n) = (n-5)^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$ est ACV.*

  Posons $u_n = |(n-5)^{\cdot} P(X = n)| = (n-5)^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

  On a $u_n \sim n^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$

  et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{(n+1)^2}{n^2}.\dfrac{\lambda}{(n+1)} \sim \dfrac{\lambda}{n}$

  On en déduit que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, ce qui nous permet d'affirmer d'après la règle de D'Alembert que la série est ACV.

  Ceci justifie que Y possède une espérance

- *On sait alors que $E(Y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n-5)^{\cdot} P(X = n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n-5)^2.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^n}{n!}$*

  A vous de calculer la somme de cette série numérique ;-)

exemple 3: un exemple de var. d'espérance non finie

Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On effectue des tirages dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée, et en ajoutant une nouvelle boule de la même couleur que la boule tirée. On note X le nombre de tirages nécessaires avant de tirer une boule blanche.
Déterminer la loi de X. Est-elle d'espérance finie?

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \geqslant 1$ fixé.
   Avec les notations habituelles, on a
   $$(X = n) = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$$
   La formule des probabilités composées donne
   $$P(X = n) = P(N_1).P_{N_1}(N_2).P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \dots P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-2}}(N_{n-1}).P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-1}} P(B_n)$$
   et ainsi
   $$P(X = n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$
2. – On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n.P(X = n) = n.p_n = \dfrac{1}{n+1}$
   – Or $\sum \dfrac{1}{n+1}$ est une série de Riemann divegente, on a donc prouvé que $\sum n.P(X = n)$ est une série divergente.
   – Ceci prouve que X n'est pas une var d'espérance finie: elle n'admet pas d'espérance

théorème 4: linéarité: admis- positivité- croissance

Soient X et Y deux v.a.r.d possédant des espérances sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$
Soient a et b deux réels.

i) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la var $aX + bY$ est aussi d' espérance finie et
$$\boxed{E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)}$$
ii) Si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$
iii) Si $X \geqslant Y$ alors $E(X) \geqslant E(Y)$
iv) Si de plus X et Y sont indépendantes alors XY possède aussi une espérance et
$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

démo

i) admis
ii) On suppose que $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant 0$.
On a $E(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n.P(X = x_n)$.
C'est la somme d'une série à termes positifs, elle est donc positive!
iii) On suppose que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant Y(\omega)$.
La va $Z = X - Y$ possède une espérance d'après i).
De plus $Z = X - Y$ est positive ; d'après le point ii) on peut dire que $E(X - Y) \geqslant 0$.
Comme $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$ on a bien prouvé que $E(X) \geqslant E(Y)$
iv) admis

théorème 5: cas particulier d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit X une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. (càd $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$)

1. Si X est d'espérance finie, alors $\boxed{E(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = \sum\limits_{n \geqslant 1}^{\infty} P(X \geqslant n)}$
2. Réciproquement, si la série de terme général $P(X \geqslant n)$ converge alors X admet une espérance finie et $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$

3 Variance V142

théorème 6: "la variance implique l'espérance"

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$
Si X^2 est d'espérance finie, **alors** X est aussi d'espérance finie

rem: On montre d'une manière plus générale que si X^k possède une espérance, alors $X^{k-1},X^{k-2}\dots,X^2,X$ possèdent des espérances

démo:

On note $X(\Omega)=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}, p_n=P(X=x_n)$

On suppose que X^2 possède une espérance

càd que la série $\sum x_n^2.p_n$ converge

- On commence par remarquer que $\forall n\in\mathbb{N}, |x_n|\leqslant\dfrac{1}{2}(1+x_n^2)$.

  En effet, $0\leqslant(1-|x_n|)^2=1-2|x_n|+|x_n|^2=1-2|x_n|+x_n^2$

- On a alors
$$\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant|x_n|.p_n\leqslant\frac{1}{2}(p_n+x_n^2.p_n)$$
  (on multiplie par $p_n\geqslant 0$)

  Comme $\sum x_n^2.p_n$ converge par hypothèse et que $\sum p_n$ converge aussi (vers 1),

  on peut affirmer que $v_n=\frac{1}{2}(p_n+x_n^2.p_n)$ est le tg d'une série convergente.

  Le théorème de convergence des séries positives permet d'affirmer que $\sum|x_n|.p_n$ converge

  Ce qui est la définition de X possède une espérance finie

Remarque: Il est possible aussi de montrer la majoration plus fine: $|x_n|\leqslant\max(1,x_n^2)$

définition 2:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$
Si X^2 est d'espérance finie, on appelle <u>variance de X</u> le réel

$$\boxed{V(X)=E([X-E(X)]^2)}$$

et on appelle <u>écart-type de X</u> le réel $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$
rem la variance existe donc uniquement dans le cas où X^2 est d'espérance finie

méthode 2: comment montrer qu'une v.a. possède une variance

- Si $X(\Omega)$ est fini, la variance existe toujours: il n'y a rien à prouver!
- Si $X(\Omega) = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, on étudie l'ACV de la série $\sum x_n^2.P(X = x_n)$ ou de la série $\sum (x_n - E(X))^2.P(X = x_n)$ *(pour l'étude de cette dernière série il est nécessaire de connaitre $E(X)$ mais pas pour la première!)*

théorème 7: Formule de Koenig-Huygens

Si X possède une variance alors $\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$

démo:

On a $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X).X + E(X)^2$

Comme X possède une variance,

on sait que cela signifie que X^2 possède une espérance

et par théorème on sait que X possède alors aussi une espérance.

D'après la linéarité de l'espérance, on peut écrire

$$E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X).X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

théorème 8:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$

1. Si X possède une variance alors pour tous réels a et b:
   i) $aX + b$ possède une variance
   ii) $\boxed{V(aX + b) = a^2V(X)}$ et $\boxed{\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)}$
2. $V(X) = 0$ ssi l'événement "X est constante" est presque certain(càd X est constante sauf sur un ens. négligeable)

démo:

Soit X une va telle que $E(X^2)$ existe.

Comme $E(X^2)$ existe on sait que $E(X)$ existe.

De plus, comme une va constante possède une espérance et que $(aX + b)^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2$

On peut affirmer que $(aX + b)^2$ possède une espérance, càd $aX + b$ possède une variance.

$$\begin{aligned}
V(aX + b) &= E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2\\
&= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2\\
&= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (a^2(E(X))^2 + 2abE(X) + b^2)\\
&= a^2E(X^2) - a^2(E(X))^2 = a^2V(X)
\end{aligned}$$

rem: on a utilisé $E(aX + b) = a.E(X) + E(b) = a.E(X) + b$

Soit X une vard. On note $X(\Omega) = \{x_i | i \in I\}$ avec I fini ou dénombrable.

On sait donc que $((X = x_i))_{i \in I}$ *est un SCE et donc que* $\sum\limits_{i \in I} P(X = x_i) = 1$

On note $E(X) = \mu$ et alors $V(X) = \sum\limits_{i \in I} (x_i - \mu)^2.P(X = x_i)$

i) **On suppose que l'événement "X est constante" est presque certain.**

càd qu'il existe $k \in I$ tel que $P(X = x_k) = 1$

Comme $\sum\limits_{i \in I} P(X = x_i) = 1$, on a $\sum\limits_{i \in I - \{k\}} P(X = x_i) = 0$.

Comme tous les termes de cette somme sont positifs ceci implique que $\forall i \neq k, P(X = x_i) = 0$

On a ainsi $\mu = E(X) = \sum\limits_{i \in I} x_i.P(X = x_i) = x_k$

et finalement $V(X) = \sum\limits_{i \in I} (x_i - \mu)^2.P(X = x_i) = (x_k - \mu)^2.P(X = x_k) = (\mu - \mu).1 = 0$

On a bien la variance de X qui est nulle.

ii) **On suppose que** $V(X) = 0$

Ceci signifie que $\sum\limits_{i \in I} (x_i - \mu)^2.P(X = x_i) = 0$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs, on peut en déduire que

$$\forall i \in I, (x_i - \mu)^2.P(X = x_i) = 0 \, (*)$$

Cependant comme $\sum\limits_{i \in I} P(X = x_i) = 1$ on a forcément un $k \in I$ tel que $P(X = x_k) \neq 0$.

Avec $(*)$ on en déduit que forcément $x_k = \mu$

Toujours avec $(*)$, on en déduit maintenant que $\forall i \neq k, P(X = x_i) = 0$.

Comme $\sum\limits_{i \in I} P(X = x_i) = 1$ on en déduit que $P(X = x_k) = 1$.

On a bien prouvé qu'il existe x_k tel que $P(X = x_k) = 1$

On dit que *l'événement "X est constante" est presque certain*

iii) *remarque: on vient de montrer l'équivalence* $V(X) = 0 \Longleftrightarrow P(X = E(X)) = 1$

4 Séries génératrices V143

On va se doter d'un objet mathématique qui caractérisera chaque v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

définition 3:
Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

On définit la fonction génératrice de X par $\boxed{G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n).t^n = E(t^X)}$

rem: si la var X ne prend qu'un nombre fini de valeurs alors G_X est un polynôme.

théorème 9: fonctions génératrices des lois de référence

loi de Bernoulli	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$G_X(t) = q + pt$	$R = +\infty$
loi binomiale	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$G_X(t) = (q+pt)^n$	$R = +\infty$
loi de Poisson	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$G_X(t) = e^{\lambda.(t-1)}$	$R = +\infty$
loi géométrique	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$	$R = \dfrac{1}{q}$
loi uniforme	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$G_X(t) = \dfrac{1}{n}.\dfrac{t-t^{n+1}}{1-t}$	$R = +\infty$

théorème 10: cela résulte du chapitre Séries Entières directement
Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

1. Le rayon de convergence R de la série entière $G_X(t)$ est supérieur ou égal à un.
2. La fonction génératrice est C^∞ sur $]-R,R[$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}}$

On en déduit que

Deux v.a. suivent la même loi ssi elles possèdent la même fonction génératrice

démo:
1. *Comme la série $G_X(t)$ converge pour $t=1$,*
(en effet $\sum_{n\geq 0} P(X=n).1^n = \sum_{n\geq 0} P(X=n) = 1$ car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), on peut en déduire que $R \geqslant 1$
2.

théorème 11:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ telle que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$.
On note G_X sa fonction génératrice de rayon R

1. Si $R>1$ alors G_X est C^∞ en 1.
2. X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1, et dans ce cas
$$\boxed{G'_X(1)=E(X)}$$
3. X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1, et dans ce cas
$$\boxed{V(X)=G"_X(1)+G'_X(1)(1-G'_X(1))}\text{ (à savoir retrouver)}$$

rem(HP): on montre que pour tout $n\geqslant 1$ entier on a $G_X^{(n)}(1)=E(X(X-1)\ldots(X-(n-1)))$

démo dans le cas où $R>1$

D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, on sait que

i) G_X est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$

ii) la dérivée est obtenue par dérivation terme à terme, càd

$$\forall t\in]-R,+R[, G'_X(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n.P(X=n).t^{n-1}$$

$$\forall t\in]-R,+R[, G''_X(t)=\sum_{n=2}^{\infty}n.(n-1).P(X=n).t^{n-2}$$

Comme on se place dans le cas où $R>1$ il est légitime de remplacer t par 1 ce qui donne

i) $G'_X(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n.P(X=n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n.P(X=n)=E(X)$ *(on reconnait la définition de $E(X)$!)*

ii) $G''_X(1)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n.(n-1).P(X=n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n.(n-1).P(X=n)=E(X(X-1))$

(par utilisation du théorème de transfert)

On a alors bien

$$\begin{aligned}V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X(X-1)+X)-(E(X))^2&=E(X(X-1))+E(X)-(E(X))^2\\&=G''_X(1)+G'_X(1)-(G'_X(1))^2\\&=G''_X(1)+G'_X(1).(1-G'_X(1))\end{aligned}$$

remarque 2

La démonstration ci-dessus a été faite dans le cas où $R>1$. Les points 2 et 3 n'ont donc pas été vraiment démontrés: il est possible que la série entière ait un rayon égal à un. Mais dans ce cas, à notre programme, aucun théorème ne nous permet d'affirmer que G_X est dérivable en 1 et que la dérivée est obtenue en dérivant terme à terme.

exemple 4: amusons-nous à retrouver les espérances

A l'aide de la fonction génératrice, retrouver l'espérance et la variance pour les lois usuelles.

théorème 12: fonction génératrice de la somme de v.a. indépendantes

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé
Soient X et Y deux v.a indépendantes telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$
On note G_X et G_Y leurs fonctions génératrices,et R_X, R_Y leurs rayons.
Alors:

i) le rayon de G_{X+Y} est au moins égal à $R = \min(R_X,R_Y)$

ii) $\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t)}$ pour tout $t \in]-R,R[$

démo:

– Notons $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X=n)t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $G_Y(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(Y=n)t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$

– Notons $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ le produit de Cauchy de ces 2 séries entières

Par théorème on sait déjà que le rayon de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_X,R_Y)$
Par définition on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P(X=k).P(Y=n-k) = P(X+Y=n)$$

ceci prouve que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ n'est rien d'autre que $G_{X+Y}(t)$. cqfd!

– *On peut aussi remarquer que*

si X et Y sont indépendantes alors t^X et t^Y sont indépendantes

et l'on peut alors écrire, sous réserve d'existence des espérances,

$$G_X(t).G_Y(t) = E(t^X).E(t^Y) = E(t^X.t^Y) = E(t^{X+Y}) = G_{X+Y}(t)$$

exemple 5: amusons-nous à retrouver des résultats connus

A l'aide des fonctions génératrices, déterminer la loi de $X+Y$ lorsque X et Y sont indépendantes

i) avec $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$

ii) avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

iii) avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$

exemple 6:

Soit X une v.a.r.d. prenant pour valeurs les entiers naturels congrus à 0 ou 1 modulo 3, et dont la loi de probabilité est donnée par $\forall n \in X(\Omega), P(X=n) = \lambda.3^{-n}$ où λ est une constante.

1. Déterminer λ
2. Déterminer la fonction génératrice de X. Justifier que X possède une espérance et une variance.

Réponse

1.
   - On a $X(\Omega) = \{0,1,3,4,6,7,9,10,\dots\} = \{3k, 3k+1 | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$
   - Comme
   $$((X=0),(X=1),(X=3),(X=4),(X=5),\dots) = ((X=3k))_{k\geqslant 0} \cup ((X=3k+1))_{k\geqslant 0}$$
   est le système complet d'événements associé à X,
   on doit avoir $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1) = 1$
   - Or $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k} = \lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^3}\right)^k = \dfrac{\lambda}{1-\dfrac{1}{3^3}} = \dfrac{27\lambda}{26}$
   et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k-1} = \dfrac{\lambda}{3} \sum\limits_{k=0}^{\infty} 3^{-3k} = \dfrac{\lambda}{3}.\dfrac{27}{26} = \dfrac{9\lambda}{26}$
   - La condition est donc $\dfrac{27\lambda}{26} + \dfrac{9\lambda}{26} = 1$, càd $\boxed{\lambda = \dfrac{13}{18}}$
2.
   - Par définition on a
   $$\begin{aligned} G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)t^n &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k)t^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=3k+1)t^{3k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k}t^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda.3^{-3k-1}t^{3k+1} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k + \lambda.\frac{t}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k \\ &= \frac{13}{18}(1+\frac{t}{3}) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k \end{aligned}$$
   Or la série géométrique $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^3}{3^3}\right)^k$ converge ssi $\left|\dfrac{t^3}{3^3}\right| < 1$ càd $|t| < 3$
   Le rayon est donc $R = 3$ et l'on a $\forall t \in]-3,+3[, G_X(t) = \dfrac{13}{18}(1+\dfrac{t}{3}).\dfrac{1}{1-\dfrac{t^3}{3^3}} = \dfrac{13}{2}.\dfrac{1+3t}{27-t^3}$
   - Comme le rayon vaut 3, on sait que G_X est C^{∞} sur $]-3,+3[$.
   En particulier, on sait que G_X est dérivable et deux fois dérivable en 1, ce qui, par théorème, permet d'affirmer que X possède une espérance et une variance

5 Loi conjointe, lois marginales

Les définitions de loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelles ont été données dans le polycopié Variables Aléatoires I dans le cas fini et dénombrable. Seuls des exemples sont ici détaillés.

exemple 7:

On réalise une série de lancers avec une pièce équilibrée: on note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang d'apparition du deuxième Pile.

1. *Quelle est la loi de X?*
2. *Déterminer la loi du couple (X,Y)*
3. *En déduire la loi marginale de Y*
4. *Déterminer pour tout entier $j \geqslant 2$, la loi de X conditionnelle à $Y = j$.*
5. *Déterminer pour tout entier $i \geqslant 1$, la loi de $Y - i$ conditionnelle à $X = i$. Remarque?*

1. On a bien sûr $X \mapsto \mathcal{G}(\frac{1}{2})$
2. Soient i et j deux entiers supérieurs ou égaux à 1
   - On a évidemment $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ lorsque $j \leqslant i$
   - Soit $i < j$. Avec les notations habituelles on a

   $$(X = i) \cap (Y = j) = F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap F_j$$

   Comme les événements ci-dessus sont indépendants et de probabilité $\frac{1}{2}$,
   on en déduit que $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{2^j}$
3. On a $Y(\Omega) = [\![2, +\infty[$ et d'après la formule des probabilités totales:

   $$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=1}^{j-1} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^j} = \frac{j-1}{2^j}$$

4. Pour tout $i \in [\![1,j-1]\!]$ on a

   $$P_{Y=j}(X = i) = \frac{P((X = i) \cap (Y = j)}{P(Y = j))} = \frac{1}{2^j}.\frac{2^j}{j-1} = \frac{1}{j-1}$$

   On reconnait la loi uniforme: si on connait le rang du deuxième Pile, il y a équiprobabilité pour le rang du premier Pile sur les tirages précédents.
5. Soit $k \geqslant 1$ on a

   $$P_{X=i}(Y - i = k) = P_{X=i}(Y = i + k) = \frac{P((X = i) \cap (Y = k + i))}{P(X = i)} = \frac{1}{2^{k+i}}.k^i = \frac{1}{2^k}$$

   La loi de $Y - i$ conditionnelle à $X = i$ est une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ elle aussi. Le temps d'attente du deuxième Pile après avoir obtenu le premier Pile est identique à celui du premier Pile.

exemple 8:

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux var indépendantes. Déterminer la loi X conditionnelle à $X+Y = k$.
On devra trouver $\mathcal{B}(k,\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$

exemple 9: péage d'autoroute

- *La loi de Poisson est souvent utilisée dans les problèmes de file d'attente.*
- *Notons X = nombre de voitures qui se présentent à une barrière de péage d'autoroute en une heure. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.*
- *A cette barrière, il y a N péages. On note Y le nombre de voitures qui passent au péage numéro 1 en une heure.(on suppose que les choix des différents conducteurs se font de façons indépendantes.)*

  On se propose de déterminer la loi de Y .

- On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et on en déduit $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- **Loi conditionnée de Y sachant** $(X = x)$ avec $x \in \mathbb{N}$ fixé
  sous l'hypothèse d'équiprobabilité, chaque voiture choisit le guichet 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{N}$.
  Donc cette loi conditionnée est la loi $\mathcal{B}(x,\frac{1}{N})$. C'est à dire
  $$\text{pour tout } y \in [\![0,x]\!], \text{ on a } P_{(X=x)}(Y = y) = \binom{x}{y} \frac{1}{N^y}(1 - \frac{1}{N})^{x-y}$$
- **loi conjointe :** Pour $x \in \mathbb{N}$ et $0 \leq y \leq x$ fixés.
  Comme $P(X = x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)$ et $P((X = x) \cap (Y = y)) = P_{(X=x)}(Y = y).P(X = x)$, on a
  $$P((X = x) \cap (Y = y)) = \binom{x}{y} \frac{1}{N^y}(1 - \frac{1}{N})^{x-y} \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)$$
  (Pour $x \in \mathbb{N}$ et $y > x$, on a bien sûr $P((X = x) \cap (Y = y)) = 0$)
- **loi de Y :** Pour $y \in \mathbb{N}$ fixé, on a ainsi
  $$\begin{aligned} P(Y = y) &= \sum_{x\in\mathbb{N}} P((X = x) \cap (Y = y)) &&= \sum_{x=0}^{\infty} P((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{x=y}^{\infty} \binom{x}{y} \frac{1}{N^y}(1 - \frac{1}{N})^{x-y} \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) &&= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^y}{y!N^y} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(\lambda(1 - \frac{1}{N}))^{x-y}}{(x-y)!} \\ &= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^y}{y!N^y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1 - \frac{1}{N}))^{k}}{k!} &&= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^y}{y!N^y} \exp(\lambda(1 - \frac{1}{N})) \end{aligned}$$
  Ce calcul donne $P(Y = y) = \exp(-\dfrac{\lambda}{N})(\dfrac{\lambda}{N})^y \dfrac{1}{y!}$
  Ainsi $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\frac{\lambda}{N})}$ (Y suit une loi de Poisson également!)

6 Résultats asymptotiques V146

théorème 13: inégalité de Markov

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r.d à valeurs positives et admettant une espérance.
Alors pour tout a réel strictement positif : $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$

démo : On note $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.
Soit $a > 0$.
On note:

- I l'ensemble des indices i pour lesquels $x_i < a$
- J l'ensemble des indices j pour lesquels $x_j \geqslant a$

Ainsi $(X \geqslant a) = \bigcup\limits_{j\in J} (X = x_j)$ et donc $P(X \geqslant a) = \sum\limits_{j\in J} P(X = x_j)$
Comme pour tout $j \in J$ on a $x_j \geqslant a$, on a aussi

$$\sum_{j\in J} x_j P(X = x_j) \geqslant \sum_{j\in J} a.P(X = x_j) = a \sum_{j\in J} P(X = x_j) = a.P(X \geqslant a)$$

Comme pour tout $i \in I$ on a $x_i \geqslant 0$ on en déduit que $\sum\limits_{i\in I} x_i.P(X = x_i) \geqslant 0$
On a donc $E(X) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n P(X = x_n) = \underbrace{\sum\limits_{i\in I} x_i.P(X = x_i)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\sum\limits_{j\in J} x_j.P(X = x_j)}_{aP(X\geqslant a)} \geqslant a.P(X \geqslant a)$

De l'inégalité de Markov,on en déduit l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev :

théorème 14: inégalité de Bienaymé-Tchebitchev

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit X une v.a.r.d admettant une espérance et une variance
Alors pour tout réel $\epsilon > 0$, $\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \epsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\epsilon^2}}$ ou $\boxed{P(|X - E(X)| \geqslant \dfrac{\sigma(X)}{\epsilon}) \leqslant \epsilon^2}$

démo:
Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
L'événement $(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$ est égal à l'événement $\big((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\big)$
L'inégalité de Markov permet d'obtenir directement

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) = P((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$ fixé.
Posons $\varepsilon = \dfrac{\sigma(X)}{\varepsilon_1} > 0$
D'après l'inégalité à peine prouvée, on peut écrire

$$P\left(|X - E(X)| \geqslant \frac{\sigma(X)}{\varepsilon_1}\right) = P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2(X)}{\epsilon^2} = \epsilon_1^2$$

théorème 15: loi faible des grands nombres (admis)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une espérance m et une variance V . On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (on a donc $m = E(X_1)$ et $V = V(X_1)$)

Alors:

i) pour tout $\varepsilon > 0$ fixé , $\boxed{P(|\frac{S_n}{n} - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V}{n.\varepsilon^2}}$

ii) pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\boxed{\lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n}{n} - m| \geqslant \varepsilon) = 0}$

In probability theory, the law of large numbers (LLN) is a theorem that describes the result of performing the same experiment a large number of times. According to the law, the average of the results obtained from a large number of trials should be close to the expected value, and will tend to become closer as more trials are performed!

exemple 10: utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce non truquée n fois de suite.

1. Trouver une condition suffisante sur l'entier n pour que la fréquence de face obtenus soit strictement comprise entre 0.4 et 0.6 avec une probabilité supérieure à 0.95
2. Au bout de 1000 lancers, on observe une proportion de pile de 0.65 . La pièce est-elle vraiment honnête?
3. Reprendre le même exercice mais en utilisant cette fois la loi faible des grands nombres

réponse:

1. *Notons X le nombre de Face obtenus et Y la fréquence de Face, ainsi $Y =$*

   On a $X \hookrightarrow$ et ainsi $E(X) =$ et $V(X) =$

   Immédiatement, on a

   $$E(Y) = \qquad \text{et} \qquad V(Y) = \qquad .$$

   L'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev appliqué à Y avec $\varepsilon = 0.1$ donne

   Comme

   $$(0.4 < Y < 0.6) = \overline{(|Y - 0.5| \geqslant 0.1)}$$

   on en déduit que

   $$P(0.4 < Y < 0.6) = 1 - P(|Y - 0.5| \geqslant 0.1)$$

Si l'on veut que

$$P(0.4 < Y < 0.6) \geqslant 0.95$$

il suffit donc que

$$1 - \frac{1}{0.04n}$$

soit

2. *Comme* $1000 \geqslant 500$, *on s'attend, avec une probabilité supérieure à 95%, à avoir une proportion de Face comprise entre 0.4 et 0.6.*

   Or la proportion observée est de 0.35.

   On peut légitimement douter de l'honnêteté de la pièce!

3. *Notons* X_i *la variable de Bernoulli qui vaut 1 si Face sort au* i*-ème tirage et 0 sinon.*
   Si la pièce est non truquée on aura

   $X_i \hookrightarrow$, *et donc* $E(X_i) =$ *et* $V(X_i) =$.

   $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *donne le nombre de faces obtenus lors des* n *premiers tirages*

   D'après la loi faible des grands nombres,
   pour tout $\varepsilon > 0$ *on a*

   et donc en particulier pour $\varepsilon = 0{,}1$ *on retrouve*

   et donc on obtient la même conclusion!
   remarque: on retrouve la même inégalité mais la loi faible des grands nombres permet d'éviter de déterminer la loi de la somme $X_1 + \cdots + X_n$
   (difficile dans certains cas, par exemple la somme de lois géométriques ou uniformes)

7 Démonstrations

DEMONSTRATION DU THEOREM 5

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

1. **On suppose que** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ deux entiers.
   - L'évenement $(X > m)$ est égal à l'événement $\bigcup\limits_{k=m+1}^{\infty} (X = k)$, comme il s'agit d'une union dénombrables d'événements deux à deux disjoints, on peut affirmer que
   $$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=m+1} q^{k-1}p = q^m.p \sum_{k=m+1}^{\infty} q^{k-m-1} = q^m.p. \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{q^m.p}{1-q} = q^m$$
   - On a $P_{(X>m)}(X = n + m) = \dfrac{P((X = n + m) \cap (X > m)}{P(X > m)}$
   Comme $n \geqslant 1$ on a $(X = n + m) \subset (X > m)$
   et donc $(X = n + m) \cap (X > m) = (X = n + m)$

     Ainsi $P_{(X>m)}(X = n + m) = \dfrac{P(X = n + m)}{P(X > m)} = \dfrac{q^{n+m-1}p}{q^m} = q^{n-1}.p$
   - On a bien prouvé que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, P_{(X>m)}(X = n + m) = P(X = n)$

   (on vient de prouver que $i) \Longrightarrow ii)$**)**

2. **On suppose que** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, P_{(X>m)}(X = n + m) = P(X = n)$
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ deux entiers.
   - L'événement $(X > n)$ est égal à l'événement $\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} (X = k)$, comme il s'agit d'une union dénombrables d'événements disjoints deux à deux, on peut affirmer que
   $$\boxed{P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k)}$$
   - L'événement $(X > n + m)$ est égal à l'événement $\bigcup\limits_{i=n+m+1}^{\infty} (X = i) = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} (X = m + k)$,
   comme il s'agit d'une union dénombrables d'événements disjoints deux à deux,
   on peut affirmer que
   $$\boxed{P_{(X>m)}(X > n + m) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P_{(X>m)}(X = m + k)}$$
   - Comme $k \geqslant n + 1$ et que $n \geqslant 0$, on peut dire que $k \geqslant 1$,
   et donc d'après l'hypothèse, on sait que
   $$\text{pour tout } k \geqslant n + 1 \text{ on aura } P_{(X>m)}(X = m + k) = P(X = k)$$
   et donc que $\boxed{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} P_{(X>m)}(X = m + k) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} P(X = k)}$.
   - On a donc bien prouvé que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2, P_{(X>m)}(X > m + n) = P(X > n)$

   (on vient de prouver que $ii) \Longrightarrow iii)$**)**

3. **On suppose que** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, P_{(X>m)}(X > n+m) = P(X > n)$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ deux entiers.
   - Comme X est à valeurs entières on a $(X = n) \cup (X > n) = (X > n-1)$.
     Cette union étant disjointe, on peut en déduire que
     $$P(X = n) + P(X > n) = P(X > n-1)$$
     et donc que
     $$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n)$$
   - De même on a $(X = n+m) \cup (X > n+m) = (X + n + m - 1)$, et on peut en déduire que
     $$P_{(X>m)}(X = n+m) + P_{(X>m)}(X > n+m) = P_{(X>m)}(X > n+m-1)$$
     Or d'après l'hypothèse on a
     $$P_{(X>m)}(X > n+m) = P(X > n) \quad \text{et} \quad P_{(X>m)}(X > n+m-1) = P(X > n-1)$$
     ce qui permet d'écrire
     $$P_{(X>m)}(X = n+m) = P(X > n-1) - P(X > n)$$
   - On a bien prouvé que pour $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, P_{(X>m)}(X = n+m) = P(X = n)$

   (on vient de prouver que $iii) \Longrightarrow ii)$**)**

4. **On suppose que** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, P_{(X>m)}(X = n+m) = P(X = n)$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ deux entiers.
   - La propriété est en particulier vrai pour tout $n \geqslant 1$ et $m = 1$,
     ce qui donne
     $$P_{(X>1)}(X = n+1) = P(X = n)$$
   - Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a donc
     $$P(X = n+1) = P(X > 1).P_{(X>1)}(X = n+1) = P(X > 1).P(X = n)$$
     Ceci prouve déjà que la suite $(P(X = n))_{n \geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $P(X > 1)$.
   - Notons $q = P(X > 1)$.
     D'après ce qui précède on a pour tout $n \geqslant 1, P(X = 1) = q^{k-1}.P(X = 1)$
   - Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on doit avoir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.
     Or
     $$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} P(X = 1) = P(X = 1).\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = P(X = 1).\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{P(X = 1)}{1 - q}$$
   - On trouve donc que $P(X = 1) = 1 - q$.
     En notant $p = 1 - q$, cela donne $\forall n \geqslant 1, P(X = n) = q^{k-1}.p$
     On a bien prouvé que X suivait une loi géométrique

   (on vient de prouver que $ii) \Longrightarrow i)$**)**