Variables aléatoires discrètes I

Table des matières

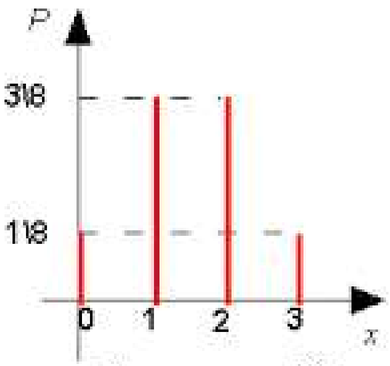
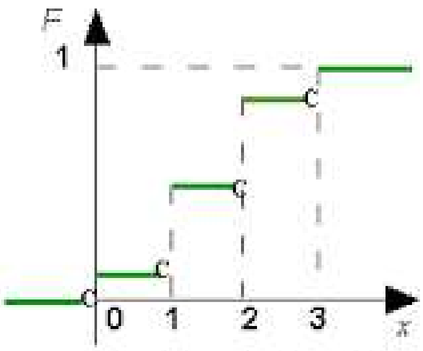
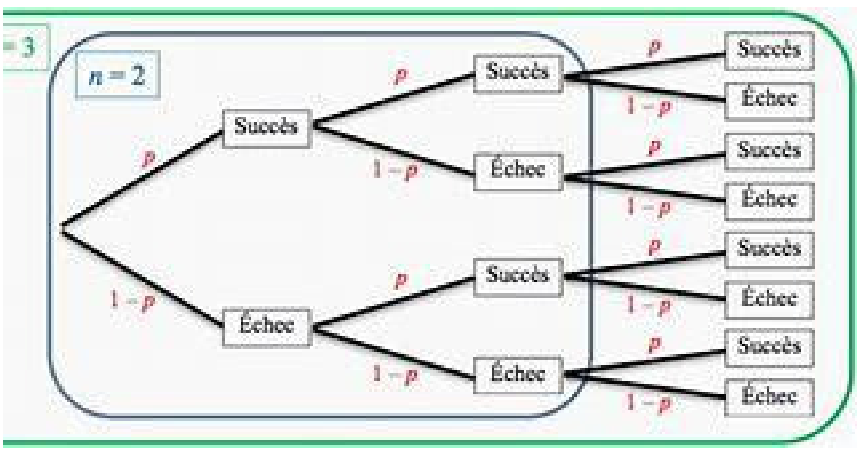


Diagramme en bâtons



Fonction de répartition



1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions et propriétés

remarque 1 (*définition v.a. cas fini*)

L'année dernière vous avez vu une définition simplifiée de variable aléatoire.
Ω étant toujours un univers fini, on considérait toujours la tribu $\mathcal{T} = P(\Omega)$ et E un ensemble quelconque, on appelait variable aléatoire toute application X définie sur Ω à valeurs dans E.
L'ensemble $X(\Omega)$, qui est l'ensemble des images prises par X, était forcément un ensemble fini.

définition 1: variables aléatoires discrètes

Soit Ω un univers muni de la tribu $\mathcal{T}$,et E un ensemble.
Une variable aléatoire discrète sur Ω est une application $X : \Omega \to E$ telle que

i) $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable
ii) Pour tout $x \in X(\Omega), (X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ appartient à $\mathcal{T}$

rem: on donne cette définition pour être sûr de pouvoir calculer la probabilité de tous les événements du type $(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$, et d'une manière générale de tous les événements "liés à X"

Dans ce cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle discrète. En abrégé, on notera $\boxed{\textit{v.a.r.d.}}$

remarque 2

- *E n'est pas forcément un ensemble de nombres: cependant c'est le cas le plus courant!*
- *Si Ω est fini ou dénombrable et que l'on a choisi comme tribu l'ensemble des parties de Ω (càd $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$) alors toute application définie sur Ω est obligatoirement une variable aléatoire. En effet, pour tout $x \in X(\Omega)$,$(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ est par définition un sous-ensemble de Ω*

remarque 3 (*Important!*)

Attention! Une autre écriture possible de $(X = x)$ est $X^{-1}(\{x\})$, mais cela ne présuppose en rien que l'application X^{-1} existe c'est à dire que X est bijective! La notation X^{-1} est ici piègeuse!

$$\boxed{X^{-1}(\{x\}) = (X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}}$$

D'une manière générale, lorsque U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(U)$ désigne l'ensemble des antécédents des élements de U par l'application X, c'est à dire $X^{-1}(U) = \{w \in \Omega \quad / \quad X(w) \in U\}$.
Les notations suivantes sont équivalentes

$$\boxed{X^{-1}(U) = (X \in U) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in U\}}$$

exemple 1:

Si X désigne une vard alors les ensembles suivants sont des événements

$$(X \leqslant 4) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant 4\} = X^{-1}(]-\infty,4])$$

$$(3 < X) = \{\omega \in \Omega | 3 < X(\omega)\} = X^{-1}(]3,+\infty[)$$

$$(3 < X \leqslant 4) = \{\omega \in \Omega | 3 < X(\omega) \leqslant 4\} = X^{-1}(]3,4]) = (3 < X) \cap (X \leqslant 4)$$

exemple 2: variable aléatoire constante

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu.
Soit k un réel fixé. On considère l'application constante $\boxed{\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & k \end{array}}$

X est bien une variable aléatoire car

i) $X(\Omega)=\{k\}$ est bien un ensemble fini

ii) L'événement $(X=k)=\{\omega\in\Omega|X(\omega)=k\}=\Omega$ appartient à $\mathcal{T}$ par définition d'une tribu

A noter que:

- *Pour tout réel $x\neq k$, $(X=x)=\emptyset$. On écrirait encore $X^{-1}(\{x\})=\emptyset$*
- *De même que l'on écrirait aussi $X^{-1}(\{k\})=\Omega$*

On utilise la notation X^{-1} mais attention X n'est pas bijective et donc n'admet pas de fonction réciproque!

exemple 3: pour définir une v.a. sur Ω fini: pas de pb!

On considère $\Omega=[\![1,6]\!]$ et $\mathcal{T}=\mathcal{P}(\Omega)$
On considère l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} X:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

On a

- $X(\Omega)=\{0,1\}$
- $(X=0)=\{1,3,5\}=X^{-1}(\{0\})$ et $(X=1)=\{2,4,6\}=X^{-1}(\{1\})$
- *La va $Y=X^2-X$ est la variable aléatoire nulle (=constante, égale à zéro)*

théorème 1: propriétés des images réciproques

Si X est une variable aléatoire et si $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset X(\Omega)$ alors

$$\boxed{(X\in(A\cup B))=(X\in A)\cup(X\in B)} \quad \text{et} \quad \boxed{(X\in(A\cap B))=(X\in A)\cap(X\in B)}$$

proposition 1 (*fonction d'une variable aléatoire*)

Soit X une une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$, alors $g\circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ notée $g(X)$
exemple: si X est une v.a. réelle alors $\sin(X), X^2, e^X$ sont v.a. réelles aussi

définition 2: loi d'une variable aléatoire, syst. complet associé à une variable

Soit X une une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.

- On appelle loi de probabilité de la variable X , et on note P_X l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(X=x) \end{array}}$
- La famille d'évènement $((X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements; on l'appelle système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X.

1.2 fonction de répartition

définition 3: fonction de répartition

Soit X une une variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé à valeurs réelles

La fonction de répartition de X, est la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array}}$

remarques:

- *X est définie sur un ensemble Ω quelconque(ensemble de p-listes,...)*
- *L'ensemble $X(\Omega)$, (càd l'ensemble image de X), est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$.*
- *La fonction F_X est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.*
- *L'ensemble $F_X(\mathbb{R})$, (c'est à dire l'ensemble image de F_X) est un sous-ensemble de $[0,1]$*
- *En Terminale, avec la loi normale, vous aviez l'habitude de manipuler les fonctions de répartition. En prépa, cette notion est beaucoup moins centrale!*

théorème 2: propriétés d'une fonction de répartition

Soit X une une v.a.r.d. sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé

Alors sa fonction de répartition F_X possède les propriétés suivantes :

1. pour tous réels a et b tels que $a < b$: $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. F_X est croissante
3. Pour tout réel x , $P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F_X(x)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

rem: la fonction de répartition est une fonction en escalier

démo

1. Soient $a < b$ deux réels.
   On a $(X \leqslant b) = (X \leqslant a) \cup (a < X \leqslant b)$ et cette union est disjointe.
   Donc $P(X \leqslant b) = P(X \leqslant a) + P(a < X \leqslant b)$ et ainsi
   $$F_X(b) - F_X(a) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = P(a < X \leqslant b)$$
2. Soient $a < b$ deux réels.
   On a $F_X(b) - F_X(a) \geqslant 0$ car $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leqslant b) \geqslant 0$ (une probabilité est toujours positive!)
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $(X > x$ et $(X \leqslant x)$ sont deux événements contraires donc la somme de leurs probabilités vaut 1
4. i) Notons déjà que la fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui nous assure, d'après le théorème de la limite monotone que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X$ existent.
   ii) On a $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \leqslant n)$ et la suite $((X \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements.
   On peut donc, grâce au théorème de la continuité croissante affirmer que
   $$\lim_{n\to+\infty} F_X(n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \leqslant n)) = P(\Omega) = 1$$
   iii) On a $\emptyset = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \leqslant -n)$ et la suite $((X \leqslant -n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.
   On peut donc, grâce au théorème de la continuité décroissante affirmer que
   $$\lim_{n\to+\infty} F_X(-n) = \lim_{n\to+\infty} P(X \leqslant -n) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \leqslant -n)) = P(\emptyset) = 0$$

1.3 présentation pratique d'une probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire.

– On note $X(\Omega)$ l'ensemble image de X, càd l'ensemble des valeurs prises par X.

méthode 1: définition pratique d'une variable aléatoire

1. Si $X(\Omega)$ est fini, on note $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}=\{x_i \mid i\in[\![1,n]\!]\}$ et $p_i=P(X=x_i)$
   Il s'agit d'avoir $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$.
   Le SCE lié à X est $((X=x_1),(X=x_2),\dots,(X=x_n))=((X=x_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$

2. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on note $X(\Omega)=\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ et $p_i=P(X=x_i)$
   Il s'agit d'avoir $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i=1$
   Le SCE lié à X est $((X=x_1),(X=x_2),\dots)=((X=x_i))_{i\in\mathbb{N}}$

exemple 4: exemples de référence

- **loi uniforme**
  On a $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et pour tout $i, p_i=P(X=x_i)=\dfrac{1}{n}$.
  On a bien $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=\underbrace{\dfrac{1}{n}+\dots+\dfrac{1}{n}}_{n}=1$
- **loi de Bernoulli de paramètre** p
  On a $X(\Omega)=\{0,1\}$ avec $p_0=P(X=0)=p$ et $p_1=P(X=1)=1-p$
  On a bien $p_0+p_1=p+(1-p)=1$
  Le SCE lié à X est $((X=0),(X=1))$
- **Loi binomiale de paramètre** (n,p)
  On a $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et $\forall i\in[\![0,n]\!], p_i=P(X=i)=\dbinom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$
  On a bien $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i=\sum\limits_{i=0}^{n}\dbinom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=(p+(1-p)^n=1$
  Le SCE lié à X est $((X=0),(X=1),\dots,(X=n))$
- **Loi de Poisson (de paramètre** $\lambda>0$**)**
  On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $i, p_i=P(X=i)=e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^i}{i!}$
  On a bien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i=\sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}.\sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^i}{i!}=e^{-\lambda}.e^{\lambda}=1$
  Le SCE lié à X est $((X=0),(X=1),(X=2),\dots,)=((X=i))_{i\in\mathbb{N}}$
- **Loi géométrique de paramètre** p
  On a $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $i, p_i=P(X=i)=(1-p).p^{i-1}$
  On a bien $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-p).p^{i-1}=(1-p).\sum\limits_{j=0}^{\infty} p^j=(1-p).\dfrac{1}{1-p}=1$
  Le SCE lié à X est $(,(X=1),(X=2),\dots,)=((X=i))_{i\in\mathbb{N}^*}$

1.4 Espérance et variance (cas fini: 1ère année)

définition 4: espérance, variance - cas fini

Soit X une v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ telle que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ soit fini.

i) On appelle espérance de X, et on note $E(X)$, le réel

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.P(X=x_i)=\sum_{x\in X(\Omega)} x.P(X=x)$$

ii) On appelle variance de X, et on note $V(X)$, le réel positif

$$V(X)=E(\,[X-E(X)]^2\,)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

iii) On appelle écart-type de X, et on note $\sigma(X)$, le réel positif $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

rem: l'espérance de la v.a. X correspond à la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives.

rem: on verra que lorsque $X(\Omega)$ n'est pas un ensemble fini mais dénombrable alors X ne possèdera pas forcément d'espérance ou de variance!

exemple 5: résultats immédiats en percevant l'espérance comme une moyenne

Montrer les résultats suivants:

1. Si X est la var constante égale à c alors $E(X)=c$
2. Si X est une var pour laquelle il existe un réel c tel que $P(X=c)=1$ alors $E(X)=c$
3. s'il existe $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall\omega\in\Omega, m\leqslant X(\omega)\leqslant M$ alors $m\leqslant E(X)\leqslant M$

théorème 3: théorème de transfert - cas fini

Soit X une v.a. telle que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et g une fonction définie (au moins) sur $X(\Omega)$ est à valeurs réelles

Alors $E(g(X))=\sum_{i=1}^{n} g(x_i).P(X=x_i)=\sum_{x\in X(\Omega)} g(x).P(X=x)$

rem: ce théorème est très important d'un point de vue pratique car il nous permet de déterminer l'espérance de la v.a.r. $g(X)$ sans déterminer sa loi, mais uniquement en connaissant celle de X

théorème 4: linéarité: admis- positivité- croissance

Soient X et Y deux v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$

i) Pour tous a et b réels, $\boxed{E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)}$

ii) Si $X\geq 0$ alors $E(X)\geq 0$

iii) Si $X\geq Y$ alors $E(X)\geqslant E(Y)$

iv) Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY)=E(X).E(Y)$

démo:

i) et iv) admis!

ii) Soit X une var telle que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ avec $x_i\geqslant 0$ pour tout i.

On a par définition $E(X)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{x_i}_{\geqslant 0}.\underbrace{P(X=x_i)}_{\geqslant 0}$

Comme le produit et la somme de réels positifs sont encore des réels positifs, on a bien $E(X)\geqslant 0$

iii) Soient X et Y tels que $X\geqslant Y$ (càd $\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\geqslant Y(\omega)$).

Comme $X-Y\geqslant 0$ on a d'après ii) $E(X-Y)\geqslant 0$

et par linéarité de l'espérance $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$. On a montré que $E(X)-E(Y)\geqslant 0$

théorème 5:

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ avec $X(\Omega)$ fini

1. $V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$ et $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$
2. Pour tous réels a et b: $\boxed{V(aX+b) = a^2V(X)}$ et $\boxed{\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)}$
3. $V(X) = 0$ ssi l'événement "X est constante" est presque certain

démo

1. Pour plus de lisibilité nous noterons $\mu = E(X)$ (μ est une constante).
   On a $(X - E(X))^2 = (X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$
   Par linéarité de l'espérance on a donc
   $$E((X-E(X))^2) = E(X^2) - 2\mu \underbrace{E(X)}_{=\mu} + \mu^2 \underbrace{E(1)}_{=1} = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$
2. Il suffit d'exploiter les formules précédentes, en particulier la linéarité de l'espérance
   $$\begin{aligned} V(aX+b) &= E((aX+b)^2) - (E(aX+b))^2 \\ &= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b\underbrace{E(1)}_{=1})^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2\overbrace{E(1)}^{=1} - \left(a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2\right) \\ &= a^2(E(X^2) - (E(X))^2) = a^2V(X) \end{aligned}$$
3. On note $X(\Omega) = \{x_i | i \in [\![1,n]\!]\}$ et $P(X = x_i) = p_i$. (on suppose les x_i distincts)
   On a
   $$E([X - E(X)]^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . p_i$$
   Or une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul.
   On a donc l'équivalence:
   $$V(X) = 0 \iff \forall i \in [1,n], (x_i - \mu)^2 . p_i = 0$$
   $\boxed{\text{Supposons que } V(X) = 0}$
   Comme $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, on a au moins un des $p_i \neq 0$ et donc il existe i_0 tel que $x_{i_0} = \mu$
   Comme les x_i sont distincts , on a alors $\forall i \neq i_0, p_i = 0$
   et on en déduit alors que $p_{i_0} = 1$
   On a montré que $P(X = \mu) = 1$ cqfd !

exemple 6: utilisation du théorème de tranfert ou calcul de la loi

Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

On note $Y = (-1)^X$ et $Z = \dfrac{Y+1}{2}$

Déterminer les espérances et variances de Y et Z

2 Lois à connaître

2.1 Loi uniforme(rappel)

définition 5: loi uniforme (sur un ensemble fini forcément!)

Soit X une variable aléatoire sur Ω fini, telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (on a $n = card(X(\Omega))$)

On dit que X suit la loi uniforme sur Ω lorsque $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$ (constante).

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$

cas particulier important:

X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ lorsque:

1. $X(\Omega) = [\![1,n]\!] = \{1,2, \dots, n\}$
2. *pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $P(X = i) = \dfrac{1}{n}$*

On écrit donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, \dots, n\}) = \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

Le système complet d'événements associés à X est $(X = i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

On utilise cette loi dans les situations d'équiprobabilité (par exemple on tire un dé équilibré à n faces et on note X le nombre tiré)

théorème 6:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Alors:

i) $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

ii) $G_X(t) = \dfrac{1}{n} . \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} = \dfrac{1}{n}(t + t^2 + \dots + t^n)$ et $R = \infty$

démo:

on utilisera $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} i.P(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.i = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} P(X=i).i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.i^2 \\ &= \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

.

et ainsi $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 = \dots = \dfrac{n^2-1}{12}$

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i)t^i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} t^i = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t^i$

. et ainsi $\forall t \neq 1, \dfrac{1}{n} . \dfrac{t - t^{n+1}}{1-t}$

2.2 Loi de Bernoulli de paramètre p

Contexte usuel: Il s'agit de modéliser l' expérience la plus simple qui soit (appelée "*épreuve de Bernoulli*"): elle ne possède que deux issues possibles, appelées conventionnellement Succès et Echec. L'événement $(X = 1)$ correspondra au Succès et l'événement $(X = 0)$ correspondra à l'Echec.

définition 6: loi de Bernoulli de paramètre p

Soit $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p lorsque:

1. $X(\Omega) = \{0,1\}$
2. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p = q$

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ou encore $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$
Le système complet d'événements associé à X est $((X = 0),(X = 1))$

remarque 4

Si X suit une loi de Bernoulli alors pour tout $n \geqslant 1, X^n = X$

théorème 7:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

i) $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p) = pq$
ii) $G_X(t) = 1 - p + pt$ et $R = \infty$

démo:

i) $E(X) = P(X = 0).0 + P(X = 1).1 = p$
ii) $E(X^2) = P(X = 0).0^2 + P(X = 1).1^2 = p$ donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$
iii) $G_X(t) = P(X = 0).t^0 + P(X = 1).t^1 = 1 - p + pt = q + pt$

exemple 7: fonction indicatrice: exemple important de v.a. de Bernoulli

Soit A un événement (c'est à dire un élément de $\mathcal{T}$).
On appelle fonction indicatrice de A la fonction notée $\mathbf{1}_A$, définie par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbf{1}_A : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$$

La fonction indicatrice de A vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon

Dans l'exemple 3, la variable aléatoire X n'est rien d'autre que la fonction indicatrice de l'événement $A =$"le nombre tiré est pair"

1. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire. A quoi est égal le carré de cette v.a.?
2. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une v.a. de Bernoulli. De quel paramètre?
3. Déterminer la variance et l'espérance de $\mathbf{1}_A$
4. Soient A et B deux événements, montrer que:

   i) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$

   ii) $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$

   iii) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$

2.3 Loi binomiale V136

Contexte usuel: on modélise une expérience (appelée "*épreuve de Bernoulli*")consistant en la réalisation de n épreuves de Bernouilli identiques(càd de même loi $\mathcal{B}(p)$) et indépendantes ,
et $\boxed{\text{on note } X \text{ le nombre total de succès.}}$
La variable X prend toutes les valeurs comprises entre 0 et n; la probabilité que $(X = k)$ est égale à la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'obtenir p succès et $n-p$ échecs, multipliée par le nombre de façons d'obtenir cette configuration, c'est à dire le coefficient binomial "k parmi n"

définition 7: loi binomiale de paramètres n et p

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p lorsque:

1. $X(\Omega) = \{0,\dots,n\} = [\![0,n]\!]$
2. pour tout $k \in [\![0,n]\!], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

On écrit $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = i))_{0\leqslant i\leqslant n}$

théorème 8:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

i) $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$

ii) $G_X(t) = (1-p+pt)^n = (q+pt)^n$ et $R = \infty$

exemple 8:

Un compteur devrait afficher les valeurs d'une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Mais lorsque X est nulle, il affiche un nombre au hasard entre 1 et n. Lorsque X est non nulle, il affiche bien X.
On note Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre affiché par le compteur.
Déterminer la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.

- On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$
- Comme $((X = 0),(X = 1),\dots,(X = n))$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales on a pour tout événement A,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A \cap (X = k)) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).P(A|X = k)$$

- Soit i un entier fixé entre 1 et n, on a $P(Y = i) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k).P(Y = i|X = k)$
- On a $P(Y = i|X = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = 0 \text{ et } i \text{ quelconque} \\ 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \geqslant 1 \text{ et } k \neq i \end{cases}$

  d'où $P(Y = i) = \frac{1}{n}.P(X = 0) + P(X = i) = \frac{1}{n}.\binom{n}{0}.p^0.(1-p)^n + \binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i}$

  Ainsi $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], P(Y = i) = \frac{(1-p)^n}{n} + \binom{n}{i}.p^i.(1-p)^{n-i}}$
- Vous devez trouver $E(Y) = \frac{n+1}{2}(1-p)^n + np$

exemple 9: Des variables aléatoires prennent l'ascenseur!

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n personnes montent dans l'ascenseur d'un immeuble de p étages.
On suppose qu'elles se rendent chacune à un étage quelconque.

– On prend $\Omega = [\![1,p]\!]^n, \mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme.

exemple pour $n = 3$ et $p = 5$.
(on suppose que les 3 personnes sont messieurs Cauchy, Kolmogorov et Riemann!)
Chaque issue possible peut être représentée par un triplet de $\Omega = [\![1,5]\!]^3$:

$$(\text{étage de M. Cauchy}, \text{étage de M. Kolmogorov}, \text{étage de M. Riemann})$$

L'événement "aucune des personnes ne descend au 2nd étage" correspond à l'ensemble des triplets dont les composantes sont à valeurs dans $\{1,3,4,5\}$. C'est un ensemble de cardinal 4^3

On définit les variables aléatoires suivantes:

– Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on note
  – T_k la v.a. qui vaut 1 si au moins une personne descend à l'étage k, et 0 sinon.
  – Z_k la v.a. égale au nombre de personnes qui descend à l'étage k
– On note X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

On a alors:

– *Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ fixé on a* $\boxed{T_k(\Omega) = \{0,1\}}$ *et* $\boxed{Z_k(\Omega) = [\![0,n]\!]}$ *ainsi que* $X(\Omega) = [\![1, \min(n,p)]\!]$
– *L'événement $(T_k = 0)$ correspond à l'événement "aucune des p personnes ne descend à l'étage k": il s'agit donc de l'ensemble des $n-$uplets d'éléments de $\{1,2,\dots,k-1,k,k+1,\dots,n\} - \{k\}$.*
  C'est un ensemble de cardinal $(p-1)^n$.
  Comme card$(\Omega) = p^n$ et que P est la probabilité uniforme on a

$$P(T_k = 0) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n \text{ et } P(T_k = 1) = 1 - P(T_k = 0) = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

  càd T_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$ $\boxed{T_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n)}$

– *Z_k suit une loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{p}$:* $\boxed{Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{p}).}$ *En effet*
  Z_k comptabilise le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendants de paramètre de succès $\frac{1}{p}$
– *On remarque que $X = T_1 + T_2 + \dots + T_p$*
  ce qui nous permet d'écrire par linéarité de l'espérance que

$$E(X) = E(T_1) + E(T_2) + \dots + E(T_p) = \sum_{k=1}^{p} E(T_k)$$

  Comme on sait que T_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$,
  on sait d'après le cours que $E(T_k) = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$
– *Au final on trouve que* $\boxed{E(X) = p - p(1 - 1/p)^n}$.
  Application numérique: pour $n = 10$ et $p = 12$ on trouve qu'il y a en moyenne à peu près 7 arrêts en moyenne

2.4 Loi géométrique

Expérience type : On procède à une succession d'expériences de type Succès -Echec(loi de Bernoulli) jusqu' à obtenir un premier succès. Les expériences sont supposées indépendantes et de même probabilité de succès $p \in]0,1[$ On s'intéresse à la variable aléatoire correspondant au nombre d'expériences nécessaires pour obtenir le premier succès (on l'appelle souvent le temps d'attente du premier succès.): cette va suit une loi géométrique de paramètre p

définition 8: loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$ lorsque:

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = q^{k-1}p$

On écrit : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = k))_{k \geqslant 1}$

théorème 9:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

i) $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

ii) $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt} = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ et $R = \dfrac{1}{1-p} = \dfrac{1}{q}$

exemple 10: répétitions d'un nombre infini d'expériences identiques indépendantes

On réalise une infinité d'expériences indépendantes de type Succès-Echec de même probabilité de succès p(schéma de Bernoulli). On note X le rang du premier succès (et $X = 0$ au cas où aucun succès n'est observé). Donner la loi de X .

Solution

- On note pour tout $i \in \mathbb{N}^*, E_i =$"échec au i-ème tirage"
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $P(X = 1) = P(\overline{E_1}) = p$
- $P(X = 2) = P(E_1 \cap \overline{E_2}) = P(E_1)P(\overline{E_2}) = qp$
- d'une manière plus générale, soit $k \geqslant 1$
  $P(X = k) = P(E_1 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap \overline{E_k}) = P(E_1) \dots P(E_{k-1})P(\overline{E_k}) = q^{k-1}.p$
- Reste à déterminer $P(X = 0)$!
  Comme $((X = k))_{k \geqslant 0}$ est un syst.complet d'événements on a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$
  On a déjà $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p. \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = p.\dfrac{1}{1-q} = 1$
  On en déduit que $P(X = 0) = 0 \quad$ (!)

2.5 Loi de Poisson

définition 9: La loi de Poisson n'est pas associée à une expérience type!

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.
On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque:

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$

On écrit $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)}$

Le système complet d'événements associé à X est $((X = k))_{k \in \mathbb{N}}$

théorème 10:

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

i) $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

ii) $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda.(t-1)} = \exp(\lambda.(t-1))$ et $R = \infty$

théorème 11: somme de variables indépendantes suivant une loi de Poisson

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a.r. définies sur un même espace, mutuellement indépendantes, et telles que $\forall i \in [\![1,n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$ alors:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

En particulier, si X_1 et X_2 sont 2 variables indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

théorème 12: convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(n,p_n)$
On suppose que (p_n) est une suites de réels dans $]0,1[$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Alors

pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$

Dans la pratique, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n \geq 30$ et $np \leq 5$

démo: k est un entier fixé. On a

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{(np_n)^k (1-p_n)^{n-k}}{k!} \frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(n-i)}{n^k} = \frac{(np_n)^k(1-p_n)^{n-k}}{k!} \prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{n})$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{n}) = 1$ car k est fixé, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (np_n)^k = \lambda^k$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ car $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ par hypothèse

On écrit $(1-p_n)^{n-k} = \exp((n-k)\ln(1-p_n))$ or $(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -np_n \underset{+\infty}{\sim} -\lambda$

ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-k)\ln(1-p_n) = \lambda$ et donc par composition de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-p_n)^{n-k} = \exp(-\lambda)$.

Au final, on a prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$

3 Indépendance de variables aléatoires discrètes

3.1 Indépendance deux à deux, mutuelle indépendance

définition 10: indépendance de deux variables aléatoires

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes lorsque :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P((X=x) \cap (Y=y)) = P(X=x).P(Y=y)$$

Cela correspond à dire que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si le fait que X prenne une valeur donnée est indépendant du fait que Y prenne une valeur donnée.

théorème 13: admis

Deux variables aléatoires discrètes sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A).P(Y \in B)$$

C'est encore la même idée

théorème 14:

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Si f est une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$ et si g est une fonction définie au moins sur $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
rem: c'est toujours la même idée : si X est Y sont indépendantes, alors n'importe quelle fonction de X est indépendante de n'importe quelle fonction de Y

définition 11: mutuelle indépendance

On dit que les variables aléatoires discrètes $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ sont mutuellement indépendantes lorsque:
$\forall (x_1,\dots,x_n) \in \prod\limits_{1\leq i\leq n} X_i(\Omega)$, les évènements $(X_i = x_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendants,
c'est à dire:

$$\forall (x_1,x_2,\dots,x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Comme on s'y attend, et comme pour les événements, l'indépendance deux à deux de v.a. n'implique pas l'indépendance mutuelle (là aussi, on poura faire l'analogie avec les familles libres

théorème 15: admis

Soient $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des v.a.r.d.
Il y a équivalence entre:

1. les v.a.r.d $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendantes
2. $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall A_i \subset X_i(\Omega)$ les évènements $(X_1 \in A_1),\dots,(X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants
3. $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall A_i \subset X_i(\Omega)$ on a

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)) = P((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

exemple 11: l'indépendance deux à deux n'implique pas la mutuelle indépendance

Soient X et Y deux variables indépendantes qui suivent la même loi uniforme $\mathcal{U}(\{-1,+1\})$.
On considère la v.a $Z = XY$
Montrer que X, Y et Z sont des variables indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

théorème 16: la mutuelle indépendance entraine l'indépendance deux à deux

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Si les variables aléatoires discrètes $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendantes **alors**

i) les variables aléatoires de toute sous famille de $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendantes,
ii) les X_i sont deux à deux indépendantes.(cas particulier du i))

exemple 12:

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ des variables mutuellement indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{B}(p)$.
On note $S_1 = \max(X_1,X_3,X_5)$ et $S_2 = \max(X_2,X_4,X_6)$ ainsi que $S = S_1 + S_2$
Déterminons la loi de S!

1. On a $S_1(\Omega) = S_2(\Omega) = \{0,1\}$ et $S(\Omega) = \{0,1,2\}$
2. Comme $(S_1 = 0) = (X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap (X_5 = 0)$, on a

$$P(S_1 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_3 = 0) \cap (X_5 = 0))$$

   Comme $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ sont mutuellement indépendantes, on peut affirmer que (X_1,X_3,X_5) le sont aussi et ainsi écrire

$$P(S_1 = 0) = P(X_1 = 0).P(X_3 = 0).P(X_5 = 0) = q^3$$

   Ainsi $S_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^3)$ (et bien sûr S_2 aussi!)
3. D'après le lemme des coalitions (hors-programme mais...) on peut affirmer que S_1 et S_2 sont deux va indépendantes. Ainsi S est la somme de 2 va de Bernoulli indépendantes et de même paramètre: grâce au théorème 18 on peut affirmer que $S \hookrightarrow \mathcal{B}(2,1-q^3)$

exemple 13:

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des variables mutuellement indépendantes qui suivent la même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,N\rrbracket)$.
On note $M = \min(X_1,X_2,\dots,X_n)$.
Pour tout $k \in \llbracket 1,N\rrbracket$ déterminer $P(M \geqslant k)$ puis la loi de M

1. Soit $k \in \llbracket 1,N\rrbracket$ fixé.
   L'événement $(M \geqslant k)$ est égal à $(X_1 \geqslant k) \cap (X_2 \geqslant k) \cap \cdots \cap (X_n \geqslant k) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (X_i \geqslant k)$
   On a ainsi $P(M \geqslant k) = P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X_i \geqslant k)\right)$
   Et comme les variables sont mutuellement indépendantes

$$P(M \geqslant k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{N+1-k}{N} = \left(\frac{N+1-k}{N}\right)^n$$

2. On a bien sûr $M(\Omega) = \llbracket 1,N\rrbracket$ et $P(M = N) = P(M \geqslant N) = \left(\dfrac{1}{N}\right)^n$
   Pour $k \in \llbracket 1,N-1\rrbracket$

3.2 Somme de variables aléatoires

théorème 17: loi de la somme de deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Soit (X,Y) un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la variable aléatoire Z définie par $\boxed{Z = X + Y}$. Alors:

i) Z est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa loi est donnée par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P((X = k) \cap (Y = n - k))}$$

ii) Si de plus les deux variables sont indépendantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).P(Y = n - k)$$

démonstration:

– Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, un système complet d'événements est $((X = k))_{k\geqslant 0}$.
On sait alors que pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B \cap (X = k))$$

– Pour $n \geqslant 0$ fixé. On considère l'événement $B = (Z = n) = (X + Y = n)$, on a alors

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((Z = n) \cap (X = k))$$

or

$$(Z = n) \cap (X = k) = (X + Y = n) \cap (X = k) = (Y = n - k) \cap (X = k)$$

d'où

$$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((Y = n - k) \cap (X = k))$$

– Comme $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, l'événement $(Y = n - k)$ est l'événement impossible quand $k > n$, et donc $P(Y = n - k) = 0$ quand $k > n$.
La somme précédente est donc égale à $P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P((X = k) \cap (Y = n - k))$

théorème 18: somme de v.a. indépendantes suivant une même loi de Bernoulli

1. Soit $p \in]0,1[$.
   Soient $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des variables aléatoires <u>mutuellement indépendantes</u> qui suivent la loi $\mathcal{B}(p)$
   Alors $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$
2. Soit $p \in]0,1[$ et $n \geqslant 1$ un entier.
   Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   Il existe n v.a. $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$, telle que $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   rem: une v.a. qui suite une loi binomiale peut être vue comme la somme de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes

exemple 14: somme de 2 v.a. de Bernoulli indépendantes

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p_2)$ deux v.a.r. indépendantes.
On note $Z = X + Y$

- $P(Z=0) = P((X=0)\cap(Y=0) \underbrace{=}_{\text{indep.}} P(X=0).P(Y=0) = q_1.q_2$
- $P(Z=1) = P((X=0)\cap(Y=1)) + P((X=1)\cap(Y=0)) \underbrace{=}_{\text{indep.}} q_1.p_2 + p_1.q_2$
- $P(Z=2) = P((X=1)\cap(Y=1) \underbrace{=}_{\text{indep.}} P(X=1).P(Y=1) = p_1.p_2$

On peut ainsi présenter la loi de $X+Y$ dans un tableau

k	0	1	2	
$P(X+Y=k)$	q_1q_2	$p_1q_2+q_1p_2$	p_1p_2	
$P(X+Y=k)$	q^2	$2pq$	p^2	cas où $p_1=p_2=p$
	$\binom{2}{0}p^0(1-p)^{2-0}$	$\binom{2}{1}p^1(1-p)^{2-1}$	$\binom{2}{2}p^2(1-p)^{2-2}$	

.

Dans le cas où $p_1 \neq p_2$ la loi de $X+Y$ n'est pas une loi particulière.
En revanche, si p_1 et p_2 sont égaux, $X+Y$ suit une loi binomiale! (ce qui ne nous étonne nullement, vu le théorème de première année ci-dessus)

exemple 15:

1. Dans une succession d'expériences succès-échec indépendantes de probabilité de succès constante $p \in]0,1[$, on note X_1 = rang du premier succès , X_2 =rang du second succès , $T = X_2 - X_1$. Chercher la loi de T, montrer que X_1 et T sont indépendantes.
2. Chercher la loi de Z, qui est la somme de deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.
3. Chercher la loi de Z, qui est la somme de deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant la même loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$

exemple 16: on regardera la définition 14

1. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux var indépendantes . Montrer que $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$
2. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ deux var indépendantes. Chercher la loi de $X|(X+Y=k)$
3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux var indépendantes. Chercher la loi de $X|(X+Y=k)$

On sera peut être amené à utiliser la formule de Vandermonde: soient m et n deux entiers, p un entier inférieur à $\min(m,n)$. alors on a $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k} . \binom{n}{p-k}$

4 Loi conjointe, lois marginales

définition 12:

Soit $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé.
Un couple de variables aléatoires est un couple (X,Y) où X et Y sont deux variables aléatoires réelles, c'est à dire une application $\boxed{\begin{array}{rcl} Z=(X,Y):\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega),Y(\omega)) \end{array}}$

on montre que $Z=(X,Y)$ est une variable aléatoire et $Z(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
rem: a priori on n'a pas $Z(\Omega)=X(\Omega)\times Y(\Omega)$ comme le montre l'exemple ci-dessous:

- *Soit X une variable de Bernoulli et posons $Y=1-X$*
- *On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\{0,1\}$ mais $Z(\Omega)=\{(0,1),(1,0)\}\neq\{0,1\}^2=X(\Omega)\times Y(\Omega)$*

définition 13:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.

- les lois marginales sont les lois de X et de Y
- la loi conjointe du couple (X,Y) est la donnée des valeurs prises par (X,Y) et des réels
$$P((X,Y)=(x,y))=P((X=x)\cap(Y=y)) \text{ où } x\in X(\Omega) \text{ et } y\in Y(\Omega)$$

rem: on présente souvent, dans le cas fini, la loi conjointe à l'aide d'un tableau
rem: si $P(Y=y)=0$ alors $\forall x\in X(\Omega), P((X=x)\cap(Y=y))=0$

remarque 5

- *La connaissance de la loi conjointe permet de déterminer les lois marginales.(cf.ci-dessus)*
- *La connaissance des lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe, comme le prouve le tableau ci-dessous*

$X\setminus Y$	.	.	.

définition 14:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$.

- Pour $x\in X(\Omega)$ fixé tel que $P(X=x)>0$, on appelle loi de Y conditionnée à $(X=x)$, ou encore, loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ l'application
$$\boxed{\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & P_{(X=x)}(Y=y)=\dfrac{P((X=x)\cap(Y=y))}{P(X=x)} \end{array}}$$
autrement dit, c'est la donnée des réels $P_{(X=x)}(Y=y)$ pour $y\in Y(\Omega)$.

- On a une définition analogue pour la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$

méthode 2: Comment déterminer les lois marginales à l'aide de la loi conjointe

Grâce aux systèmes complets d'événements $(X = x)_{x\in X(\Omega)}$ d'une part, et $(Y = y)_{y\in Y(\Omega)}$ d'autre part,on a

– la loi de X à l'aide de la loi conjointe est donnée par

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))}$$

– la loi de Y à l'aide de la loi conjointe est donnée par

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y))}$$

Plus précisément:

– dans le cas où $Y(\Omega) = \{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ est fini, on a $P(X = x) = \sum_{j=1}^{n} P((X = x) \cap (Y = y_j))$

– dans le cas où $Y(\Omega) = \{y_j | j \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, on a $P(X = x) = \sum_{j=0}^{\infty} P((X = x)\cap(Y = y_j))$

exemple 17:

Soit (X,Y) un couple de v.a discrètes dont la loi est donnée par le tableau suivant:

$X \setminus Y$	1	2	3	4	. .
1	0.08	0.04	0.16	0.12	
2	0.04	0.02	0.08	0.06	
3	0.08	0.04	0.16	0.12	

$Z \setminus T$	1	2	3	4	. .
1	.	.	.	.	
2					
3					

1. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y)
2. Si l'on souhaite regarder si X et Y sont indépendantes, combien de vérifications devrait-on effectuer? En effectuer quelques unes.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2)$ puis celle de X sachant $(Y = 3)$
4. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $T = \max(X,Y)$. Déterminer la loi conjointe du couple (Z,T)

exemple 18:

On lance deux fois un dé équilibré à 4 faces.
On note $\Omega = [\![1,4]\!]^2, \mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme.
Soient X la var égale à la somme des deux lancers, et Y la var égale au maximun des deux lancers.
On note $Z = (X,Y)$.

On a donc $\boxed{\begin{array}{llll} Z : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \omega = (\omega_1,\omega_2) & \longmapsto & (X(\omega) = \omega_1 + \omega_2, Y(\omega) = \max(\omega_1,\omega_2)) \end{array}}$

1. Déterminer, sous forme de tableau, la loi de Z.
   (c'est à dire la loi conjointe du couple (X,Y))
2. Donner les lois marginales.(c'est à dire les lois de X et Y)
3. Donner la loi conditionnelle de X sachant que $(Y = 3)$

pour 3)

y_j	1	2	3	4
$P(Y = y_j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

et pour 4)

x_i	4	5	6
$P_{Y=3}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

exemple 19:

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k renferme k boules numérotées de 1 à k.On chosit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ainsi que la loi de X.
2. Pour $(k,j) \in [\![1,n]\!]^2$ déterminer $P_{X=k}(Y=j)$
3. Calculer $P(X=Y)$
4. Donner la loi de Y et son espérance

1. On a bien sûr $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$
2. Soient k et j fixés dans $[\![1,n]\!]$
   i) Pour $j > k$, on a $P_{(X=k)}(Y=j) = 0$ car il n'y a pas de boule numérotée j dans la boîte k.
   ii) pour $j \leqslant k$, on a $P_{(X=k)}(Y=j) = \dfrac{1}{k}$ car dans la boîte k il y k boule dont une seule est numérotée j
3. $((X=k))_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k).P_{X=k}(X=Y) \qquad \text{or } P_{X=k}(X=Y) = P_{X=k}(Y=k) = \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

4. On utilise le même système complet d'événements.
   Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On a

$$P(Y=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k).P_{X=k}(Y=j) = \sum_{k=j}^{n} P(X=k).P_{X=k}(Y=j) = \sum_{k=j}^{n}\frac{1}{n}.\frac{1}{k} = \frac{1}{n}.\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}$$

et ainsi on a par définition $$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}.\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}.\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{j}{k}$$

or $$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{j}{k} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{j}{k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}$$

$$E(Y) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} k+1 = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{1}{2n}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right) = \frac{n+3}{4}$$