FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES A VALEURS REELLES

Table des matières

On rappelle la définition de la dérivabilité pour une fonction h d'une variable:

. *h est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsque* $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$ *existe et est finie*

Notations

- p est un entier supérieur ou égal à 2
- D est une partie de $\mathbb{R}^p$
- f une fonction de D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  On pourra donc écrire f sous la forme $\boxed{\begin{array}{llll} f: & D\subset\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_p)\end{array}}$
- Les p variables $x_1,\dots,x_p$ s'appellent <u>les variables de f</u>.
- x_1 est la première variable de f, x_2 est la deuxième variable de f,...
- Lorsque f est une fonction de 2 ou 3 variables, on préférera noter (x,y) ou (x,y,z) les variables de f.

exemple 1:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1.\sin(x_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} g:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) & \longmapsto & \dfrac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \end{array}$$

sont également les fonctions

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x.\sin(y) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} f:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \end{array}$$

1 Préliminaires : topologie de $\mathbb{R}^p$ avec $p=2$ ou 3 (V085)

1.1 norme et distance euclidiennes

définition 1: norme et distance euclidiennes

i) On appelle norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$, l'application $\boxed{\begin{array}{lll} ||.||: \quad \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x=(x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & \sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2} \end{array}}$

ii) On appelle distance euclidienne sur $\mathbb{R}^p$ l'application

$$\boxed{\begin{array}{lll} d:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y)=||x-y||=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_p-y_p)^2} \end{array}}$$

proposition 1 (*rappel*)

la distance euclidienne est une application de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^+$ telle que :

i.) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p, d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

ii.) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p, d(x,y)=d(y,x)$

iii.) $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p, d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

1.2 boules

définition 2:

Soit $a\in\mathbb{R}^p$ et r un réel strictement positif.

i) On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r, et on note $B_o(a,r)$, l'ensemble des vecteurs $x\in\mathbb{R}^p$ tels que $d(a,x)<r$. Ainsi, $\boxed{B_o(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^p|d(a,x)<r\}}$

ii) On appelle boule fermée de centre a et de rayon r, et on note $B_f(a,r)$, l'ensemble des vecteurs $x\in\mathbb{R}^p$ tels que $d(a,x)\leqslant r$. Ainsi, $\boxed{B_f(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^p|d(a,x)\leqslant r\}}$

Les notions de boules généralisent dans $\mathbb{R}^p$ la notion d'intervalle existant dans $\mathbb{R}$

1.3 ouvert-fermé

définition 3: partie ouverte

Soit D une partie de $\mathbb{R}^p$.
On dit que D est un ouvert, ou une partie ouverte, de $\mathbb{R}^p$ lorsque $\forall a \in D, \exists r > 0, B_o(a,r) \subset O$

exemple 2:

1. Montrer que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $[0,1[\times[0,1[$ n'est pas un ouvert

1. *Soit $a = (x_0,y_0) \in D$. (on a donc $y_0 > 0$)*

   Posons $r = \dfrac{y_0}{2} > 0$ et montrons que $B_0(a,r) \subset D$.
   Soit $(x,y) \in B_0(a,r)$.
   . *on a $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$*
   . *or $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geqslant \sqrt{(y-y_0)^2} = |y-y_0|$*
   . *ainsi $|y-y_0| < r = \dfrac{y_0}{2}$*
   . *càd $y_0 - r < y < y_0 + r$*
   . *or $y_0 - r = y_0 - \dfrac{y_0}{2} = \dfrac{y_0}{2} > 0$*
   . *ainsi $y > 0$*
   et donc $(x,y) \in D$!

2. *Notons $D = [0,1[\times[0,1[$*

   Soit $a = (0,0) \in D$
   Soit $r > 0$
   . *Nous allons montrer que $B_O(a,r) \not\subset D$*
   . *on a $x = (\dfrac{-r}{2},0) \in B_O(a,r)$*
   . *en effet, $d(x,a) = \sqrt{(\dfrac{-r}{2}-0)^2+(0-0)^2} = \dfrac{r}{2} < r$*
   . *mais $x \notin D$ car $\dfrac{-r}{2} < 0$*

   On a montré qu'il n'existait pas de boule ouverte centrée en a incluse dans D
   donc D n'est pas un ouvert!

définition 4:

Soit F une partie de $\mathbb{R}^p$. On dit que F est un fermé, ou une partie fermée, de $\mathbb{R}^p$ lorsque le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^p$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$

remarque 1

- *une boule ouverte est une partie ouverte.*
- *une boule fermée est une partie fermée.*
- *$\mathbb{R}^p$ et l'ensemble vide sont des parties à la fois ouvertes et fermées. Ce sont les seules à posséder cette propriété.*
- *Dans $\mathbb{R}^2$, un demi-plan fermé est un fermé, un demi-plan ouvert est un ouvert, ...*

remarque 2 (*pratique(H.P.): inégalité stricte=ouvert, égalité=fermé*)

On démontre que si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

- *l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | f(x) > 0\}$ est un ouvert (ex: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 > 0\}$)*
- *l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | f(x) = 0\}$ est un fermé (ex: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 = 0\}$)*
- *l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé (ex: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leqslant 0\}$)*
-
- *l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p | 0 < f(x) \geqslant x\}$ n'est ni un fermé, ni un ouvert.*

exemple 3:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sin x > y\}$ est un ouvert
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 + \cos(xy) \geqslant 18\}$ est un fermé

définition 5: intérieur, extérieur, frontière

Soit D une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. un point x est à l'intérieur de D s'il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans D. L'ensemble de ces points est l'intérieur de D
2. un point x est à l'extérieur de D s'il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans le complémentaire de D. L'ensemble de ces points est l'extérieur de D
3. un point x est adhérent à D si toute boule ouverte centrée en x rencontre D. L'ensemble de ces points est l'adhérence de D, noté $\overline{D}$ (ne pas confondre avec le complémentaire de D)
4. un point x est sur la frontière de D si toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois D et son complémentaire.(on montre que $Fr(D) = \overline{D} - int(D)$)

dessin:

remarque 3

1. *l'intérieur de D est le plus grand ouvert contenu dans D*
2. *l'extérieur de D est le plus grand ouvert contenu dans le complémentaire de D*
3. *un point x adhérent à D est soit à l'intérieur de D soit sur sa frontière*
4. *le complémentaire de $\overline{D}$ est l'extérieur de D*

définition 6: partie bornée

Soit D une partie de $\mathbb{R}^p$.
On dit que D est une partie bornée lorsque $\exists M > 0, \forall x \in D, ||x|| \leqslant M$
rem: on rappelle qu'on ne peut parler de majorant et de minorant dans $\mathbb{R}^p \dots$

exemple 4:

Montrer les équivalences entre les propriétés suivantes:

i) D est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$

ii) D est contenue(=incluse) dans une boule

iii) $\exists M > 0, \forall (x,y) \in D^2, d(x,y) \leqslant M$

mais cela n'équivaut évidemment pas à $\forall (x,y) \in D^2, \exists M > 0, d(x,y) \leqslant M$

démonstration:

- $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ On suppose $\exists M > 0, \forall x \in D, ||x|| \leqslant M$
  Il est alors clair que D est incluse dans la boule fermée de centre 0 et de rayon M

- $\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ On suppose $\exists R > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}^p, \forall x \in D, d(x,x_0) \leqslant R$
  Soient $(x,y) \in D^2$.
  Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire $d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y) \leqslant R + R$.
  En notant $M = 2R$, on a montré que $\forall (x,y) \in D^2, d(x,y) \leqslant M$

- $\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ On suppose $\exists M > 0, \forall (x,y) \in D^2, d(x,y) \leqslant M$
  Considérons un élément particulier $y_0 \in D$.
  D'après l'hypothèse, pour tout $x \in D$ on a $d(x,y_0) \leqslant M$, càd $x \in B_f(y_0,M)$
  Ceci signifie que D est incluse dans la boule de fermée de centre y_0 et de rayon M

méthode 1: pour montrer qu'une partie n'est pas bornée

Il suffit d'exhiber une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de D telle que $\lim\limits_{n \to \infty} ||x_n|| = +\infty$

Exemple:

Soit $D = \{(x,x^2) | x \in \mathbb{R}\}$.
Montrons que D est une partie fermée et non bornée.
Démonstration:

- les couples $x_n = (n,n^2)$ appartiennent à A,
  or l'on a $||x_n|| = ||(n,n^2)|| = \sqrt{n^2 + n^4} \to \infty$, ce qui prouve que D **n'est pas bornée**.
- considérons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y - x^2 \end{array}}$ qui est continue car c'est un application polynomiale,
  et l'on remarque que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f(x,y) = 0\}$.
  D'apres la remarque 2, on peut affirmer que D **est un fermé.**

2 Limite en un point adhérent (V086)

2.1 ensemble de définition, lignes de niveau

exemple 5: quelques fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Préciser à chaque fois le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction est définie

$\boxed{\begin{array}{rcl} f_1 : D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_2 : D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_3 : D_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{y} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_4 : D_4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+y^2} \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{rcl} f_5 : D_5 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{xy} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_6 : D_6 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-y^2} \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rcl} f_7 : D_7 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2-y^2} \end{array}}$

définition 7: lignes de niveau (fonctions de deux variables)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Pour tout $k \in \mathbb{R}$ fixé, on appelle ligne de niveau d'indice k la courbe d'équation $f(x,y) = k$

Vous pourriez dessiner les lignes de niveau des fonctions ci-dessus?

2.2 limite en un point adhérent

définition 8:

Soient

. D une partie de $\mathbb{R}^p$

. $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point adhérent à D

. $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction

On dit que

1. la fonction f admet une limite en a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, lorsqu'il existe un réel l tel que
$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, ||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \epsilon}$$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ lorsque $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, ||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ lorsque $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, ||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \leqslant M$

dessin

exemple 6:

Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rccl} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \end{array}}$

- le point $a = (0,0)$ n'est pas un point appartenant à D, mais c'est un point adhérent à U.
- Notons $\boxed{\begin{array}{rccl} g : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rccl} h : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{\sin t}{t} \end{array}}$
- La fonction g est une fonction polynomiale: on a $\lim\limits_{(0,0)} g = 0$
- La fonction (d'une seule variable) bien connue h possède 1 comme limite en 0: $\lim\limits_{0} h = 1$
- Par le théorème de composition des limites, comme $f = h \circ g$, on peut affirmer que $\lim\limits_{(0,0)} f = 1$

méthode 2: pour montrer qu'une fonction ne possède pas de limite en un point

De même que pour les fonctions d'une seule variable, où l'on pouvait tendre vers $a \in \mathbb{R}$ de plusieurs manières (principalement par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures), on va pouvoir pour une fonction de plusieurs variables tendre vers $a \in \mathbb{R}^p$ par plusieurs chemins.

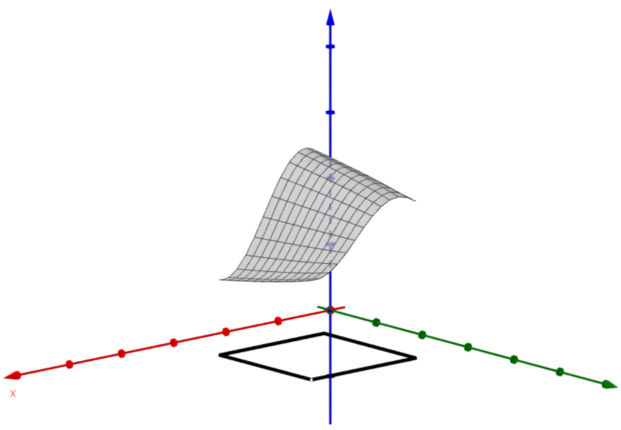
A retenir: il ne suffit pas de regarder ce qui se passe uniquement à x fixé ou y fixé!

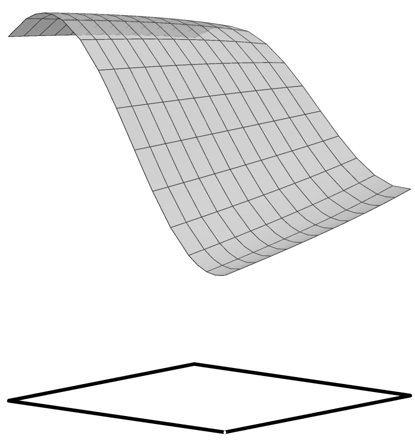
exemple 7:

On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^4 + y^2} \end{array}}$

Montrer que f ne possède pas de limite en $(0,0)$

remarque 4 (***représentation graphique d'une fonction de 2 variables à valeurs réelles***)





On peut représenter graphiquement les fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit D une partie (=sous-ensemble) de $\mathbb{R}^2$, et $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
La fonction f est entièrement caractérisée par la surface $\Sigma = \{(x,y,f(x,y)) | (x,y) \in D\}$.

3 Continuité (V087)

définition 9:

1. Soit $a \in D$, on dit que <u>f est continue au point a</u> lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
   c'est à dire :
   $$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, ||x - a|| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$$
2. On dit que <u>f est continue sur D</u> lorsqu'elle est continue en tout point de D

exemple 8:

Montrer que la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \arctan(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ \pi/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$ n'est pas continue en $(0,0)$

exemple 9:

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto xy$

1. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée sur tout rectangle $[a,b] \times [c,d]$
   (On précisera un majorant de $|f|$ en fonction de (a,b,c,d))
3. Montrer que la fonction f est bornée sur tout ensemble borné

1. *f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^2$ car* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

2. - *Comme $D=[a,b]\times[c,d]$ est un domaine fermé (car produit cartésien de fermés) et borné, et que f est une fonction continue sur D, le théorème des bornes atteintes affirme que f est bornée sur D*

   - *Pour tout $x\in[a,b]$, on a $|x|\leqslant \max(|a|,|b|)=M_1$*
     Pour tout $y\in[c,d]$, on a $|y|\leqslant \max(|c|,|d|)=M_2$
     On a ainsi
     $$\forall (x,y)\in[a,b]\times[c,d], |f(x,y)|=|xy|=|x|.|y|\leqslant M_1.M_2$$

3. *Soit D un domaine borné (par forcément fermé).*

   On sait alors que
   $$\exists R>0, \forall a\in D, ||a||\leqslant R$$
   Notons $D_1=B_f(0,R)$,
   on vient d'établir que $D\subset D_1$

   Comme f est continue sur le domaine fermé borné D_1,
   on peut affirmer que f est bornée sur D_1.
   Ainsi $\exists M\geqslant 0, \forall a\in D_1, |f(a)|\leqslant M$
   Comme $D\subset D_1$, on a a fortiori $\exists M\geqslant 0, \forall a\in D, |f(a)|\leqslant M$

exemple 10:

Soit $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$ une fonction continue

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,0) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(3,y) \end{array}}$

1. Montrer avec rigueur que g et h sont continues

2. D'une manière générale, montrer que si x_0 et y_0 sont fixés dans $\mathbb{R}$ alors les applications $x\mapsto f(x,y_0)$ et $y\mapsto f(x_0,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

remarque 5 (***continuité par rapport à une variable***)

Soit f une fonction de deux variables.

i) On dit que ***la fonction f est continue par rapport à x (ou par rapport à la première variable)*** *lorsque à y_0 fixé, la fonction $x \mapsto f(x,y_0)$ est une fonction continue.*

ii) On dit que ***la fonction f est continue par rapport à y (ou par rapport à la deuxième variable)*** *lorsque à x_0 fixé, la fonction $y \mapsto f(x_0,y)$ est une fonction continue.*

iii) On vient de montrer dans l'exemple 10 que

La continuité entraîne la continuité par rapport à chaque variable

iv) Mais attention, la réciproque est fausse! :-(

La continuité par rapport à chaque variable n'entraîne pas la continuité.

Autrement dit, il ne suffit pas de vérifier que les applications $x \mapsto f(x,y_0)$ et $y \mapsto f(x_0,y)$ sont continues pour pouvoir affirmer que la fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ est continue!

exemple 11: la continuité par rapport à chaque variable n'entraîne PAS la continuité (HP)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est continue par rapport à x et par rapport à y en $(0,0)$
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$

4 Dérivées partielles des fonctions à valeurs réelles (V088)

4.1 dérivées partielles premières

définition 10: dérivée partielle première pour une fonction de deux variables

Soit $\boxed{\begin{array}{lcl} f : D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$ et (x_0,y_0) un point intérieur de D

1. On dit que
   <u>f admet une dérivée partielle première par rapport à la première variable en $a = (x_0,y_0)$</u>

   lorsque la fonction $x \mapsto f(x,y_0)$ est dérivable en x_0

   c'est à dire lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$ existe et est finie,

   dans ce cas on note $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}$ ou $\boxed{\partial_1 f(x_0,y_0)}$ cette limite

2. On dit que
   <u>f admet une dérivée partielle première par rapport à la deuxième variable en (x_0,y_0)</u>

   lorsque la fonction $y \mapsto f(x_0,y)$ est dérivable en y_0

   c'est à dire lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$ existe et est finie,

   dans ce cas on note $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$ ou $\boxed{\partial_2 f(x_0,y_0)}$ cette limite

3. Lorsque toutes les dérivées partielles premières en a existent,
   on appelle <u>gradient de f en a</u>, et on note $\overrightarrow{grad(f)}(a)$ ou $\nabla_a f$, le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$

rem: La notation correcte est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *et non pas* $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$

exemple 12: Etude de dérivées partielles premières en un point particulier

Soit $\boxed{\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^4+y^2} \end{array}}$

Etudier l'existence des dérivées partielles premières en $(0,0)$

Etude de l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

- Par définition, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe si la fonction $g : x \mapsto f(x,0)$ est dérivable en 0

  On a pour tout $x, g(x) = \sqrt{x^4+0} = x^2$.

  La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0 avec $g'(0) = 2.0 = 0$

  d'où $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et } \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$

Etude de l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

- Par définition, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe si la fonction $g : y \mapsto f(0,y)$ est dérivable en 0

  On a pour tout $y, g(y) = \sqrt{0+y^2} = |y|$.

  On sait que la fonction g n'est pas dérivable en 0

  d'où $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ n'existe pas}}$

exemple 13: Etude des dérivées partielles premières en tout point

Soit $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x.e^{xy} \end{array}}$

Etudier l'existence des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$
(càd justifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

solution

exemple 14:

Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & x^2t^3 \end{array}$

Donner les dérivées partielles premières de f

définition 11: dérivée partielle première pour une fonction de trois variables

Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}}$ et $a = (x_0,y_0,z_0)$ un point intérieur de D

1. On dit que f admet une dérivée partielle première par rapport à la première variable en a lorsque la fonction $x \mapsto f(x,y_0,z_0)$ est dérivable en x_0

   càd lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$ existe et est finie,

   dans ce cas on note $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}$ ou $\boxed{\partial_1 f(x_0,y_0,z_0)}$ cette limite
2. On dit que f admet une dérivée partielle première par rapport à la deuxième variable en a

   lorsque la fonction $y \mapsto f(x_0,y,z_0)$ est dérivable en y_0

   càd lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$ existe et est finie,

   dans ce cas on note $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}$ ou $\boxed{\partial_2 f(x_0,y_0,z_0)}$ cette limite
3. On dit que f admet une dérivée partielle première par rapport à la troisième variable en a

   lorsque la fonction $z \mapsto f(x_0,y_0,z)$ est dérivable en z_0

   càd lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0,y_0,z_0+h) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$ existe et est finie,

   dans ce cas on note $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$ ou $\boxed{\partial_3 f(x_0,y_0,z_0)}$ cette limite

exemple 15:

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & y.|x| + x.|y| + z \end{array}$

Etude des dérivées partielles premières en (0,0,0)

solution:

- *La fonction* $g : x \mapsto f(x,0,0) = 0$ *est dérivable en* 0, *avec* $g'(0) = 0$ *d'où* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0$
- *La fonction* $g : y \mapsto f(0,y,0) = 0$ *est dérivable en* 0, *avec* $g'(0) = 0$ *d'où* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0$
- *La fonction* $g : z \mapsto f(0,0,z) = z$ *est dérivable en* 0, *avec* $g'(0) = 1$ *d'où* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1$

définition 12:

La fonction f est dite de classe C^1 sur un ouvert D lorsque f admet en tout point de D toutes ses dérivées partielles premières, et que de plus, chacune des dérivées partielles premières est continue sur D

théorème 1: on s'attend à ces résultats ci

On note $\boxed{C^1(D,\mathbb{R})}$, l'ensemble des fonctions de classe C^1 définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$
L'ensemble $C^1(D,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit interne.

4.2 différentielle - développement limité à l'ordre un (V089)

théorème 2: "C^1 implique existence DL_1"

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et f une fonction $C^1(D,\mathbb{R})$.
Alors

i) en tout point $a \in D$, f admet un développement limité d'ordre un
ii) $\forall h = (h_1, \ldots ,h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in D$ on a

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^{i=p} h_i.\partial_i f(a) + ||h||.\varepsilon(h) \\ &= f(a) + < h,\nabla_a(f) > + ||h||.\varepsilon(h) \end{aligned}$$

En particulier

- *Dans le cas d'une fonction de deux variables avec $a = (x_0,y_0)$, on a*

$$f(a+h) = f(x_0+h_1,y_0+h_2) = f(a) + h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \sqrt{h_1^2+h_2^2}.\varepsilon(h)$$

- *Dans le cas d'une fonction de trois variables, on a*

$$f(a+h) = f(a) + h_1.\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}(a) + h_3.\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}.\varepsilon(h)$$

$< , >$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$ et $\nabla_a f$ désigne le gradient de f calculé en a, c'est à dire:

- $\nabla_a(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)) = (\partial_1 f(a),\partial_2 f(a))$ pour une fonction de 2 variables
- $\nabla_a(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a),\frac{\partial f}{\partial z}(a))$ pour une fonction de 3 variables

exemple 16:

Soit $\boxed{\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2y+2y \end{array}}$

1. Montrer que f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ un DL à l'ordre 1
2. Donner le DL au point $a = (1,2)$

- *La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$*
- *Comme f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors f possède en tout point de $\mathbb{R}^2$ un DL_1*
- *On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+2$*
  et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3$
- *On a $f(1,2) = 6$, et donc le DL_1 de f au point $a = (1,2)$ est*

$$\forall h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2, f(1+h_1,2+h_2) = 6 + 4h_1 + 3h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}.\varepsilon(h)$$

Ce DL peut servir pour obtenir une valeur approchée de $f(x,y)$ quand (x,y) est "proche" de $(1,2)$
Par exemple, ce DL donne pour valeur approchée de $f(1.01,1.98)$ la quantité $6+4\times0.01+3\times(-0.02) = 5.98$ *(la valeur exacte est* 5.979798*)*

4.3 dérivée d'une fonction composée

activité préliminaire :

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+xy-y^2 \end{array} \qquad u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \qquad v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^3 \end{array}$$

On pose $g : t \mapsto f(u(t),v(t))$

1. Calculer successivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$ et enfin $u'(t).\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t)) + v'(t).\dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$
2. Calculer $g(t)$ puis $g'(t)$. Remarque?

théorème 3: dérivée d'une fonction composée

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^1(D,\mathbb{R})$.
Soient u et v deux fonctions C^1 définies sur un intervalle ouvert I telles que $\forall t \in I$, $(u(t),\, v(t)) \in D$.
On peut donc définir la fonction $\boxed{\begin{array}{ccc} g: I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(u(t),\, v(t)) \end{array}}$

Alors :

i) g est de classe C^1 sur I, c'est à dire que $g \in C^1(I,\mathbb{R})$

ii) et l'on a

$$\boxed{\forall t \in I, g'(t) = u'(t).\partial_1 f(u(t),\, v(t)) + v'(t).\partial_2 f(u(t),\, v(t))}$$

remarque: la plupart du temps, la fonction f est donnée sous la forme $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$.
On peut alors écrire

$$g'(t) = u'(t).\frac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t)) + v'(t).\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$$

schéma:

exemple 17:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

On pose $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(2t,1+t^2) \end{array}}$ et $\boxed{\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & f(\cos\theta, \sin\theta) \end{array}}$

Exprimer $g'(t)$ et $h'(\theta)$ en fonction des dérivées partielles de f.

exemple 18: (chaîne de dérivation)

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & g(u,v) = f(u^2+v^2,uv) \end{array}$.

Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de f notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

rem: ici le Physicien écrit $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}.\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}.\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *et* $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}.\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}.\dfrac{\partial f}{\partial y}$

remarque

on a un résultat analogue si D est un ouvert de $\mathbb{R}^3$: sous des hypothéses aussi larges et du même genre...

La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(u(t),\, v(t),\, w(t)) \end{array}}$ est de classe C^1 avec

$$\boxed{\forall t \in I, g'(t) = u'(t).\partial_1 f(u(t),\, v(t),\, w(t)) + v'(t).\partial_2 f(u(t),\, v(t),\, w(t)) + w'(t).\partial_3 f(u(t),\, v(t),\, w(t))}$$

5 Dérivées d'ordre supérieur (V090)

exemple 19: présentation des dérivées d'ordre supérieur

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2y + y^3$

- f admet des dérivées partielles premières et l'on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2$
- la fonction $g = \dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto 2xy$ admet elle aussi des dérivées partielles premières

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x$$

En utilisant les notations liées à la fonction f cela donne

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_1^2 f = \partial_1\partial_1 f \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_2\partial_1 f$$

On a ainsi $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2y \end{array}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x \end{array}}$

- la fonction $h = \dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto x^2 + 3y^2$ admet elle aussi des dérivées partielles premières

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 6y$$

En utilisant les notations liées à la fonction f

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_1\partial_2 f \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_2^2 f = \partial_2\partial_2 f$$

On a ainsi $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x \end{array}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 6y \end{array}}$

définition 13:

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. où D est un ouvert
On dit que la fonction f est de classe C^2 sur D lorsque elle admet toutes ses dérivées partielles premières et secondes sur D et que ces dérivées sont continues sur D.

On note $\boxed{C^2(D,\mathbb{R})}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$

proposition 2

- *$C^2(D,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit interne.*
- *Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^p$*

théorème 4: théorème de Schwarz , admis

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $f \in C^2(D,\mathbb{R})$.
Alors , pour tout i et j, $\boxed{\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f}$

rem: en particulier si f est une fonction de classe C^2 de deux variables on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

On rappelle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_1\partial_2 f = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_2\partial_1 f = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$

exemple 20:

Soient g et h deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x)+h(y) \end{array}}$

Les dérivées croisées de f sont elles égales?

- *On a* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(y)$
- *La fonction* $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)$ *est dérivable (fonction constante!) on a donc* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$
- *La fonction* $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h'(y)$ *est dérivable (fonction constante!) on a donc* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$
- *Même si f n'est pas de classe C^2, les dérivées croisées sont égales!*

6 Exemples d'équations aux dérivées partielles

proposition 3

Soient I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ et $D = I \times J$.

- *Les solutions de classe C^1 sur D de l'équation* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0}$ *sont les fonctions* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \quad D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(y) \end{array}}$

  où A est une fonction $C^1(J,\mathbb{R})$.
- *Les solutions de classe C^1 sur D de l'équation* $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0}$ *sont les fonctions* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \quad D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(x) \end{array}}$

  où A est une fonction $C^1(I,\mathbb{R})$.

preuve:

- On va raisonner par Analyse-Synthèse
- $\boxed{\text{Partie Analyse}}$

  On suppose que $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ vérifie $\forall (x,y) \in D = I \times J, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

  - Pour $y \in J$ fixé, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} g : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}}$.

    On alors $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.
    Ainsi la fonction g est constante sur l'intervalle I
    Ainsi, il existe un réel, a priori dépendant de y c'est pourquoi nous le noterons $A(y)$, tel que $\forall x \in I, g(x) = A(y)$

    On a ainsi
    $$\boxed{\forall (x,y) \in D = I \times J, f(x,y) = A(y)}$$
  - **Montrons maintenant que l'application $A : y \mapsto A(y)$ est C^1 sur J**
    Pour $x_0 \in I$ fixé, on remarque que $A : y \mapsto A(y) = f(x_0,y)$
    Comme la fonction $y \mapsto (x_0,y)$ est C^1 sur J et que la fonction f est C^1 sur $I \times J$, par composition on sait que la fonction $y \mapsto f(x_0,y)$ est C^1 sur J, càd que A est C^1 sur J
  - **A la fin de la partie synthèse, on a montré que si $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ alors nécessairement $f : (x,y) \mapsto A(y)$ avec $A \in C^1(J,\mathbb{R})$**
- $\boxed{\text{Partie Synthèse}}$

  Soit $\boxed{\begin{array}{rcl} f : I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & A(y) \end{array}}$ avec $A \in C^1(J,\mathbb{R})$

  Il est clair que $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ et vérifie $\forall (x,y) \in D, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

VOUS TROUVEREZ DE NOMBREUX EXERCICES CORRIGES SUR LE SITE !