Compléments d'algèbre linéaire

Serge Lemarquis

Table des matières

Dans tout ce polycopié, $\mathbb{K}$ désignera comme toujours le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

définition 1:

Soit A une partie(=sous-ensemble) non vide de E.
On appelle sous-espace vectoriel engendré par la partie A, et on note $\boxed{\text{vect}\, A}$, le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient A

$$\text{c'est à dire } \boxed{\text{vect}(A) = \bigcap_{F \text{sev de E tq } A \subset F} F}$$

Il est immédiat que (si A est un sev alors $\text{vect}(A) = A$)
et (si $A \subset B$ alors $\text{vect}\, A \subset \text{vect}\, B$)

exemple 1: un exemple avec des fonctions

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note A [resp. B] l'ensemble des fonctions paires [resp. impaires] appartenant à E.
On a $\text{vect}(A) =$ et $\text{vect}(B) =$ car on sait que

théorème 1: caractérisation importante

Soit A une partie non vide de E.
$\text{vect}\, A$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme une combinaison linéaire de vecteurs de A,
c'est à dire que $\boxed{\text{vect}\, A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\vec{a}_i | n \geqslant 1, \lambda_i \in \mathbb{K}, \vec{a}_i \in A\}}$
Le sev engendré par une partie A est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A (on rappelle qu'une combinaison linéaire de vecteurs est toujours une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs (cf. définition 4)

2 Somme de n sous-espaces vectoriels

2.1 somme de 2 sous-espaces vectoriels (rappel)

définition 2: somme de 2 sev

Soient F_1 et F_2 étant deux sev de E.

i) On appelle espace vectoriel somme de F_1 et F_2, et on note $F_1 + F_2$, l'ensemble :

$$\boxed{F_1 + F_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{x}_1 \in F_1 \text{ et } \vec{x}_2 \in F_2\}}$$

on montre que c'est le plus petit sev de E qui contient à la fois F_1 et F_2,
càd $\boxed{F_1 + F_2 = \text{vect}(F_1 \cup F_2)}$

ii) On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe, et on note $F_1 \oplus F_2$, lorsque la décomposition de tout vecteur de $F_1 + F_2$ comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 est unique.

$$\text{càd } \forall \vec{x} \in F_1 + F_2, \exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \quad \text{(l'écriture est unique)}$$

rem: pour tout $\vec{x} \in F_1 + F_2$ on sait par définition qu'il existe une décomposition de la forme $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2$. Lorsque la décomposition est toujours unique on dira que F_1 et F_2 sont en somme directe

théorème 2: caracréisation de la somme directe de 2 sev (rappel

Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

i.) F_1 et F_2 sont en somme directe

ii.) La décomposition de $\vec{0}$ est unique.
(càd que si $\vec{0}$ s'écrit $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in F_1$ et $\vec{x}_2 \in F_2$ alors forcément $\vec{x}_1 = \vec{0}$ et $\vec{x}_2 = \vec{0}$.)

iii.) $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

2.2 généralisation à la somme de n sev

définition 3: somme de n sev

Soit $(F_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille de n sev de E.

i) On appelle espace vectoriel somme des F_i , et on note $F_1 + \cdots + F_n$ ou $\sum_{i=1}^{n} F_i$, l'ensemble :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + \cdots + F_n = \{\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n | \forall i \in \{1,\dots,n\}, \vec{x}_i \in F_i\}}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + \cdots + F_n = \{\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n | (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in F_1 \times \dots F_n\}}$$

on montre que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les F_i.
càd que $\boxed{F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \text{vect}(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n)}$

ii) On dit que les F_i sont en somme directe, et on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ ou $\bigoplus_{i\in\{1,\dots,n\}} F_i$, lorsque

$$\forall \vec{x} \in \sum_{i=1}^{n} F_i, \quad \exists!\,(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i$$

c'est à dire, la somme de n sev est directe lorsque la décomposition de tout vecteur(ou l'écriture) est unique

théorème 3: pas de caractérisation avec les intersections pour la somme de n sev!

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i. la famille $(F_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est en somme directe

ii. la décomposition de $\vec{0}$ est unique.
(càd que si $\vec{0} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$ avec $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\vec{x}_i \in F_i$ alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \vec{x}_i = \vec{0}$)

"la décomposition de tout vecteur est unique ssi celle du vecteur nul est unique"

Si la famille $(F_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ ***est en somme directe alors pour tout (i,j) tel que*** $i \neq j$ $F_i \cap F_j = \{\vec{0}\}$
mais $\boxed{\textbf{\textit{la réciproque est fausse}}}$ ***: pensez à 3 droites distinctes dans le plan***

démonstration

exemple 2:
Soit $E = \mathbb{R}^4$.
On considère $F_1 = \{(a,a,0,0)|\, a \in \mathbb{R}\}, F_2 = \{(0,b,b,0)|\, b \in \mathbb{R}\}$ et $F_3 = \{(0,0,c,c)|\, c \in \mathbb{R}\}$
Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe.

exemple 3:
Soit $E = \mathbb{R}^4$.
On considère $F_1 = \{(a,a,0,0)|a \in \mathbb{R}\}, F_2 = \{(0,b,b,0)|b \in \mathbb{R}\}$ et $F_3 = \{(0,0,c,c)|c \in \mathbb{R}\}$

1. Donner une CNS pour que le vecteur (x,y,z,t) appartienne à $F_1 + F_2 + F_3$
   On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F_1 + F_2 + F_3 &\iff \exists\, \vec{x}_1 \in F_1, \exists\, \vec{x}_2 \in F_2, \exists\, \vec{x}_3 \in F_3, (x,y,z,t) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z,t) = (a,a,0,0) + (0,b,b,0) + (0,0,c,c) \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x &= a \\ y &= a+b \\ z &= b+c \\ t &= c \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a &= x \\ b &= y-x \\ c &= z-y+x \\ t &= z-y+x \end{cases}
\end{aligned}
$$

   On trouve donc que le vecteur (x,y,z,t) appartient à $\sum\limits_{i=1}^{3} F_i$ ssi $t = z - y + x$

   Conclusion $\boxed{F_1 + F_2 + F_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + z - t = 0\}}$

2. Sans utiliser le résultat de l'exemple 2, peut-on dire si la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe?

   Oui, car le système précédent a montré que pour un vecteur $(x,y,z,t) \in F_1 + F_2 + F_3$ fixé, il existe un unique triplet de vecteurs $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3$ tel que

$$(x,y,z,t) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$$

exemple 4:
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.
On a vu que l'on avait l'équivalence

$$f \text{ est diagonalisable} \iff E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

On retrouve le fait que

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \forall \vec{x} \in E, \exists!\,(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_p} \,|\, \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p$$

exemple 5:
Dans l'espace E des fonctions continues de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$, on considère les sous-espaces vectoriels

$F_1 = \{f \in E / f \text{ est constante}\}$, $F_2 = \{f \in E / \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\}$ et $F_3 = \{f \in E / \forall t \in [0,1], f(t) = 0\}$

1. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ 2. Etablir que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$

1. Soit $(f_1,f_2,f_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3$ tel que $f_1 + f_2 + f_3 = 0$

   Ceci signifie que pour tout $t \in [-1, +1]$ on a $f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0$

   En particulier:
   i) pour $t = 0$ cela donne $f_1(0) + 0 + 0 = 0$ et donc forcément $f_1 = 0$
   ii) pour tout $t \in]0,1]$ cela donne $f_1(t) + f_2(t) + 0 = 0$ et donc forcément $\forall t \in]0,1], f_2(t) = 0 - f_1(0) = 0$
   Comme on a déjà $\forall t \in [-1,0], f_2(t) = 0$ *on a donc* $\forall t \in [-1,1], f_2(t) = 0$ càd $f_2 = 0$
   iii) pour tout $t \in [-1,0[$ cela donne $f_1(t) + 0 + f_3(t) = 0$ et donc forcément $\forall t \in [-1,0[, f_3(t) = 0 - f_1(0) = 0$
   Comme on a déjà $\forall t \in [0,1], f_3(t) = 0$ *on a donc* $\forall t \in [-1,1], f_3(t) = 0$ càd $f_3 = 0$

   On a donc $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.

   $\boxed{\text{Conclusion: } F_1 \oplus F_2 \oplus F_3}$

2. Il s'agit maintenant de montrer que $E = F_1 + F_2 + F_3$, càd que tout élément f de E s'écrit sous la forme $f_1 + f_2 + f_3$ avec chaque $f_i \in F_i$.
   On va tenir un raisonnement par **Analyse-Synthèse**:

   i) Partie Analyse: (On suppose que la décomposition existe et on la cherche)
   Soit $f \in E$ quelconque fixé et $(f_i)_{\{i=1..3\}}$ tel que $f = f_1 + f_2 + f_3$

   On a donc pour tout $t \in [-1,1], f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$

   – pour $t = 0$ cela donne $f(0) = f_1(0)$.
   Comme f_1 est constante, on a $\boxed{\begin{array}{rcl} f_1 : [-1,+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(0) \end{array}}$
   – pour tout $t > 0$ on a $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = f(0) + f_2(t) + 0$.
   d'où $\boxed{\begin{array}{rcl} f_2 : [-1,+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ f(t) - f(0) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$
   – pour tout $t < 0$ on a $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = f(0) + 0 + f_3(t)$.

d'où $\boxed{\begin{array}{rcl} f_3 : [-1,+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \geqslant 0 \\ f(t)-f(0) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

ii) Partie Synthèse:(On vérifie si la décomposition trouvée marche ou pas)
Soit $f \in E$.
On considère les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies comme ci-dessus.
On a:

i) $f_1 \in F_1$ car c'est une fonction constante sur $[-1,+1]$
ii) $f_2 \in F_2$ car f_2 est continue sur $[-1,+1]$ (en effet on a bien la continuité à gauche et à droite en 0) et de plus $\forall t \leqslant 0, f_2(t) = 0$
iii) $f_3 \in F_3$ pour des raisons analogues
iv) $f = f_1 + f_2 + f_3$ car:
  - $\forall t > 0, f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) =$
  - $f_1(0) + f_2(0) + f_3(0) =$
  - $\forall t < 0, f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) =$

Ceci prouve que $\forall f \in E, \exists!(f_1,f_2,f_3) \in F_1 \times F_2 \times F_3, f = f_1 + f_2 + f_3$

On a donc montré que $\boxed{E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3}$

2.3 projecteurs associés à une décomposition

- De même que lorsque l'on avait la décomposition $E = F_1 \oplus F_2$, nous avions introduit p_1 la projection sur F_1 parallèlement à F_2, et p_2 la projection sur F_2 parallèlement à F_1 de la manière suivante

$$\boxed{\begin{array}{rcl} p_1 : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & \vec{x}_1 \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} p_2 : E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & \vec{x}_2 \end{array}}$$

  et avions montré que

$$p_1 + p_2 = id_E \qquad p_1 \circ p_2 = 0 \qquad p_2 \circ p_1 = 0$$

- Lorsque l'on a la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ nous allons également considérer une famille de projecteurs associés.
  exemple avec $n = 3$

.

théorème 4:

Soit une somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Notons G_i la somme directe $G_i = \bigoplus_{j \in \{1,\dots,n\}-\{i\}} F_j$

i) On a alors $E = F_i \oplus G_i$

ii) Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à G_i.
Alors : $\boxed{p_1 + \cdots + p_n = id_E \text{ et } \forall (i \neq j) \quad p_i \circ p_j = 0}$

Rappel: comme $F_i \oplus G_i = E$ cela a bien un sens de parler de la projection sur F_i parallèlement à G_i

exemple 6: un exemple très simple dans $\mathbb{R}^3$

Soit $E = \mathbb{R}^3$.

On note $F_1 = \{(x,0,0)|x \in \mathbb{R}\}$, , $F_2 = \{(0,y,0)|y \in \mathbb{R}\}$ et $F_3 = \{(0,0,z)|z \in \mathbb{R}\}$

- Par définition, on a

$$F_1+F_2+F_3 = \{(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$$

- La somme $F_1 + F_2 + F_3$ est clairement directe car tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme la somme de trois vecteurs de F_1, F_2 et F_3. $((x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z))$
- Notons $G_1 = F_2 \oplus F_3$, $\quad G_2 = F_1 \oplus F_3$ et $G_3 = F_1 \oplus F_2$
  On a:
  - $G_1 = F_2 \oplus F_3 = \{(0,y,0) + (0,0,z)|y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \{(0,y,z)|y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$
  - $G_2 = F_1 \oplus F_3 = \{(x,0,0) + (0,0,z)|x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,z)|x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$
  - $G_3 = F_1 \oplus F_2 = \{(x,0,0) + (0,y,0)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,0)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
- On remarque que $F_1 \oplus G_1 = \mathbb{R}^3$, ainsi que $F_2 \oplus G_2 = \mathbb{R}^3$ et $F_3 \oplus G_3 = \mathbb{R}^3$.
  Ceci est une propriété générale comme l'indique le théorème 4
- Notons p_i la projection sur F_i parallèlement à G_i
  On a donc $\boxed{\begin{array}{rccc} p_1: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x,0,0) \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rccc} p_2: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (0,y,0) \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{rccc} p_3: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (0,0,z) \end{array}}$
- On remarque que $p_1 + p_2 + p_3 = id_{\mathbb{R}^3}$.
  En effet, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a
  $(p_1 + p_2 + p_3)(x,y,z) = p_1(x,y,z) + p_2(x,y,z) + p_3(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = (x,y,z)$
- On remarque que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_3 = p_3 \circ p_1 = p_2 \circ p_1 = p_3 \circ p_2 = p_1 \circ p_3 = 0$.
  En effet, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a
  $(p_1 \circ p_2)(x,y,z) = p_1(p_2(x,y,z)) = p_1(0,y,0) = (0,0,0)$
  $(p_2 \circ p_3)(x,y,z) = p_2(p_3(x,y,z)) = p_2(0,0,z) = (0,0,0)$
  ...
- ces deux derniers points sont des propriétés plus générales comme l'indique le théorème 4

3 Famille quelconque de vecteurs

définition 4: combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F}$ est une famille finie ou **infinie** de vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ toute somme de la forme $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\vec{x}_k$ où p est un entier quelconque non nul, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ une suite finie de scalaires, et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une suite finie de vecteurs de $\mathcal{F}$

rem: une combinaison linéaire de vecteurs est donc toujours une combinaison avec un nombre fini de termes

définition 5: famille génératrice infinie

Soit $\mathcal{F}$ une famille **infinie** de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E lorsque $E = \text{vect}(\mathcal{F})$

càd $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E lorsque tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.(cette décomposition n'étant pas forcément unique)

càd

$$\forall \vec{x} \in E\,, \exists\, p \in \mathbb{N}^*, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists\,(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in \mathcal{F}^p \text{ tels que } \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\vec{x}_i$$

définition 6: famille génératrice infinie

Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille **infinie** de vecteurs d'un espace vectoriel E.

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E lorsque $E = \text{vect}(\mathcal{F})$

càd $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E lorsque tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.(cette décomposition n'étant pas forcément unique)

càd

$$\forall \vec{x} \in E\,, \exists\, p \in \mathbb{N}^*, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists\,(i_1, \dots, i_p) \in I^p \text{ tels que } \vec{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\vec{x}_{i_k}$$

méthode 1: comment montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E

On montre que tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'élements de la famille $\mathcal{F}$

exemple 7: combinaison linéaire de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni des lois usuelles. On considère la famille infinie $\mathcal{F} = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

- $\sum_{k=0}^{\infty} X^k$ n'est pas une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$
- $2X^{2017} - 3X^{1515} + \pi.X^{13}$ et $\sum_{k=0}^{10000} X^k$ sont des combinaisons linéaires de la famille $\mathcal{F}$
- Une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ n'est rien autre qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$
- Réciproquement, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$, car un polynôme est par définition une somme d'un nombre fini de monômes.
- La famille $\mathcal{F} = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$ car tout élément de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit bien comme la combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{F}$.

exemple 8:
La famille $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\vec{x}_k = (1,k)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

exemple 9:
L'ensemble des fxs $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ où $f_p : x \mapsto \cos(px)$ est-il une famille génératrice de $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

définition 7: famille libre cas d'une famille infinie

Soit $\mathcal{F}$ une famille infinie de vecteurs de E.
La famille $\mathcal{F}$ est dite libre lorsque toute sous famille finie de $\mathcal{F}$ est libre,
sinon la famille $\mathcal{F}$ est dite liée.
(la famille $\mathcal{F}$ est donc liée lorsqu'il existe (au moins) une sous famille finie de $\mathcal{F}$ qui est liée)

remarque 1

autrement dit, la famille infinie $\mathcal{F}$ est liée lorsque

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ et } (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in \mathcal{F}^p \text{ tels que } \begin{cases} (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \\ \text{et} \\ \lambda_1.\vec{x}_1 + \dots + \lambda_p.\vec{x}_p = \vec{0} \end{cases}$$

et la famille $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i\in I}$ est liée lorsque

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ et } (\vec{x}_{i_1}, \dots, \vec{x}_{i_p}) \in \mathcal{F}^p \text{ tels que } \begin{cases} (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0) \\ \text{et} \\ \lambda_1.\vec{x}_{i_1} + \dots + \lambda_p.\vec{x}_{i_p} = \vec{0} \end{cases}$$

exemple 10:
La famille de polynômes $(P_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définis par $P_p = (X + p)^{2020}$ est-elle une famille libre de polynômes?

théorème 5: un théorème très pratique

On a l'équivalence:

$$\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une famille libre } \iff \text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_p) \text{ est libre}$$

démo

théorème 6: cas d'une base de cardinal infini

Il y a équivalence entre

i.) $\mathcal{B} = (\vec{x}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de E

ii.) $\forall \vec{x} \in E, \exists N \in \mathbb{N}, \exists ! \, (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^{N+1} \,|\, \vec{x} = \sum\limits_{i=0}^{N} \lambda_i.\vec{x}_i$

théorème 7:

Si $\mathcal{F} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$,
alors $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$

rem: on en déduit directement grâce à ce théorème que la famille $\mathcal{F} = ((X+2)^{2022})_{p\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$