SÉRIES ENTIÈRES

Serge Lemarquis

Table des matières

1 Séries de fonctions (HP)

Dans ce chapitre, nous allons étudier des fonctions qui sont définies à partir de séries.
En exercice, nous pouvons rencontrer de telles fonctions.

exemple 1: une fonction très célèbre!

- On peut définir sur $]1,+\infty[$ la fonction zéta de Riemann par $\boxed{\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}}$.
  car on sait que pour $x>1$, le membre de droite désigne la somme d'une série convergente, donc une valeur finie bien définie.
- on peut montrer sans trop de difficultés que ζ est une fonction strictement décroissante, et que $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\zeta(x)=1$. (pour cela, on encadre $\frac{1}{n^x}$ à l'aide d'intégrales)
- On sait aussi que $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

exemple 2: une curiosité inattendue

Coonsidérons la fonction $\boxed{S: x\mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}}$.

- Les valeurs de $x\in\mathbb{R}$ qui sont dans l'ensemble de définition de S correspondent aux valeurs de x pour lesquelles la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$ est convergente.
  Il s'agit donc de $]-\infty,-2[\cup[0,+\infty[$
- On a $\forall x\in]-\infty,-2[\cup[0,+\infty[, S(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ 1+x & \text{sinon}\end{cases}$

On peut remarquer sur cet exemple, qu' une somme infinie de fonctions C^∞ ne donne pas forcément une fonction C^∞, en effet la fonction S n'est même pas continue.
Alors qu'à n fixé, la fonction $x\mapsto\frac{x}{(1+x)^n}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}-\{-1\}$!

D'une manière générale, une série de fonctions est une série du type $\sum f_n$ où f_n désigne une fonction d'une variable complexe ou réelle. Les premières questions qui se posent sont les suivantes :

- pour quelle(s) valeur(s) de x réel [resp. z complexe], la série $\sum f_n(x)$ [resp. $\sum f_n(z)$] converge ?
- en cas de convergence, peut-on exprimer la somme de la série en fonction des fonctions usuelles ?
- La fonction somme de la série est-elle continue? dérivable ? C^∞ ?

L'étude générale des séries de fonctions (convergence uniforme, convergence normale,. . .) n'est pas au programme de la PT, cependant nous devons étudier un type particulier de séries de fonctions (que l'on retrouvera aussi dans le chapitre "probabilités"): les séries entières

2 Définitions, rayon

2.1 Série entière complexe

définition 1: série entière complexe

On appelle série entière complexe toute série de la forme $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n}$ où les coefficients a_n sont des complexes (indépendants de z) et où z désigne une variable complexe.

exemple 3: savoir reconnaître une série entière

Parmi les séries suivantes, lesquelles sont des séries entières complexes?

- $\sum_{n\geqslant 0} z^n$
- $\sum_{n\geqslant 2} z^n$
- $\sum_{n\geqslant 0} z^{2n}$
- $\sum_{n\geqslant 0} z^{2n-7}$
- $\sum_{n\geqslant 0} z^{n/2}$

remarque 1

- *La locution "série entière" vous semble-t-elle bien adaptée à l'objet qu'elle est censée décrire?*
- *Remarquons que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est une série entière particulière, qui correspond à une suite (a_n) nulle à partir d'un certain rang.*
- *lorsque l'on se fixe z, on est ramené à l'étude d'une série numérique: tous les résultats vus dans ce chapitre-ci sont alors applicables!*
- *une série entière peut s'écrire de différentes manières.*
  Par exemple:
  $\sum_{n\geqslant 0}(n^2+n)z^{2n+1}$, $\sum_{n\geqslant 1}(n^2-n)z^{2n-1}$ *et* $\sum_{n\geqslant 2}(n^2-3n+2)z^{2n-3}$ *désignent la même série entière.*
  On aura donc parfois intérêt à écrire mentalement la série entière sous forme "étendue":

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots}$$

2.2 Rayon de convergence

définition 2: rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ l'élément, noté R, de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\boxed{R = \sup\{r \geqslant 0 |\ \text{la suite } (a_n.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ soit bornée}\}}$$

càd aussi

$$\boxed{R = \sup\{r \geqslant 0 |\ \text{la suite } (|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ soit majorée}\}}$$

rem: lorsque l'ensemble précédent n'est pas majoré, on convient de poser $R = +\infty$
rem: l'ensemble précédent n'est jamais vide car 0 y appartient
rem: on montre que l'ensemble précédent est un intervalle

méthode 1: déterminer le rayon à l'aide de la définition

On détermine les $r \geqslant 0$ tels que la suite $(|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0}$ soit majorée.

exemple:

Nous allons déterminer le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$.

Notons $E = \{r \geqslant 0|\ \textit{la suite}\ (|a_n|r^n)_{n\geqslant 0}\ \textit{soit majorée}\} = \{r \geqslant 0|\ \textit{la suite}\ (r^n)_{n\geqslant 0}\ \textit{soit majorée}\}$.

Soit $r \geqslant 0$

- *si* $r > 1$ *on a* $\lim r^n = +\infty$ *donc* $r \neq E$
- *si* $r \geqslant 1$, *on a* $\forall n \in \mathbb{N}, r^n \leqslant 1$ *donc* $r \in E$
- *ainsi* $E = [0,1]$
- *D'où* $\boxed{R = Rayon(\sum z^n) = \sup([0,1]) = 1}$

exemple 4:

Déterminer le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n.z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ et de $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3^n.z^{2n}$

théorème 1: propriétés caractéristiques du rayon de convergence(important)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. **Alors** :

i) $R = 0 \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$

ii) $R = +\infty \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$

iii) $R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |z| < R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |z| > R & \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}$

2.3 Exemples de référence

théorème 2: exemple de référence : la série géométrique

- Le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ est égal à un.
- La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ converge [absolument] si et seulement si $|z| < 1$.
- Et l'on a $\boxed{\forall |z| < 1, \sum\limits_{n\geqslant 0} z^n = \dfrac{1}{1-z}}$

théorème 3: exemple de référence : l'exponentielle complexe

- La rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est égal à $+\infty$
- La série entière complexe $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout z complexe
- Et l'on a $\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z}$

remarque 2

On rappelle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *on a* $\exp(x+iy) = \exp(x).\exp(iy) = \exp(x).(\cos(y) + i\sin(y))$

2.4 lemme d'Abel

théorème 4: lemme d'Abel

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière complexe.
On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ soit bornée.
Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

dire que $\underline{\textit{la suite } (a_n z_0^n)_{n\geqslant 0} \textit{ est bornée}}$ *équivaut à dire que* $\underline{\textit{la suite } (|a_n z_0^n|)_{n\geqslant 0} \textit{ est majorée}}$

démonstration:

On suppose $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*, \exists M > 0, \forall n \geqslant 0, |a_n.z_0^n| \leqslant M$

Soit z tel que $|z| < |z_0|$
Soit $n \in \mathbb{N}$
On a

$$|a_n.z^n| = \left|a_n.z_0^n.\frac{z^n}{z_0^n}\right| = |a_n.z_0^n|.\left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M.\left|\frac{z}{z_0}\right|^n = u_n$$

On a $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant |a_n.z^n| \leqslant u_n$
Or $\sum u_n$ est une série géométrique convergente car de raison $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| = \frac{|z|}{|z_0|}$ avec $0 \leqslant q < 1$
d'où $\sum u_n$ est une série convergente
par théorème de comparaison on peut affirmer que $\sum |a_n.z^n|$ est un série convergente.

On a bien montré que $\sum a_n.z^n$ est une série ACV

2.5 Série entière réelle

définition 3: série entière réelle

On appelle <u>série entière réelle</u> toute série de la forme $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n}$ où les coefficients a_n sont des réels(indépendants de x) et où x désigne une variable réelle.

définition 4: rayon de convergence(bis)

On appelle <u>rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$</u> l'élément, noté R, de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\boxed{R = \sup\{r \geqslant 0 |\text{ la suite } (|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ soit majorée}\}}$$

théorème 5: propriétés caractéristiques du rayon de convergence(bis)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. **Alors** :

i) $R = 0 \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ne converge que pour $x = 0$

ii) $R = +\infty \iff \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$

iii) $R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |x| < R (\text{càd } x \in]-R, +R[\ ) & \text{alors } \sum a_n x^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |x| > R & \text{alors } \sum a_n x^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}$

exemple 5: des interrogations formatrices!

On note R le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.2^n$ ACV, que peut-on dire de R?
2. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.(-2)^n$ CV que peut-on dire de R?
3. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.5^n$ GDV que peut-on dire de R?
4. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.4^n$ DV que peut-on dire de R?
5. Si pour tout $x \in [0,3[$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.x^n$ CV, que peut-on dire de R?
6. Si pour tout $x \geqslant 3$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n.x^n$ DV, que peut-on dire de R?

exemple 6: très important !

- On considère les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$. Comparer leur rayon de convergence.
- D'une manière plus générale: soit p un entier strictement positif et q un entier quelconque , si R' désigne le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{np+q}$ et R le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ alors on a $\boxed{R' = (R)^{1/p}}$

corollaire 1

On a aussi:

i) $R = \sup\{r \geqslant 0 |$ *la suite* $(a_n.r^n)_{n\geqslant 0}$ *tende vers* $0\}$

ii) $R = \sup\{r \geqslant 0 |$ *la suite* $(a_n.r^n)_{n\geqslant 0}$ *converge*$\}$

iii) $R = \sup\{r \geqslant 0 |$ *la série* $\sum a_n r^n$ *converge*$\}$

méthode 2: déterminer le rayon à l'aide de ses propriétés caractéristiques

On détermine les valeurs de $r \geqslant 0$ (ou de z ou de x) pour lesquelles:

1. le terme général tend vers 0 ou pas
2. la série est convergente ou pas
3. la série est absolument convergente ou pas

exemple 7:

Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

Déterminer le rayon de la série $\sum a^n z^n$, et celui de la série $\sum a^n z^{2n}$

exemple 8: lien avec les probabilités

Soit (a_n) une suite telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et vaut 1.

Que dire du rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$?

3 Quelques résultats sur le rayon

3.1 Multiplication par un scalaire non nul

théorème 6: multiplier une SE par un scalaire non nul ne modifie pas le rayon

Soit λ un complexe non nul.

Les séries entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda.a_n z^n$ ont le même rayon

Cela découle directement du fait que si λ est un complexe non nul

on a alors l'équivalence

$$\text{la suite } (|a_n|.r^n) \text{ est majorée} \iff \text{la suite } (|\lambda|.|a_n|.r^n) \text{ est majorée}$$

et donc

$$\{r \geqslant 0 | \text{ la suite } (|a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ est majorée}\} = \{r \geqslant 0 | \text{ la suite } (|\lambda.a_n|.r^n)_{n\geqslant 0} \text{ est majorée}\}$$

exemple 9:

- la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3.z^n$ a même rayon que la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ càd $Rayon(\sum\limits_{n\geqslant 0} 3.z^n) = 1$
- la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} 3^n.z^n$ n'a, a priori, pas le même rayon que la SE $\sum\limits_{n\geqslant 0} z.^n$

3.2 Règle de D'Alembert

A $z \neq 0$ fixé, la série $\sum a_n z^n$ est une série numérique. On peut donc étudier sa convergence avec tous les outils vus dans ce dernier chapitre. En particulier, on peut penser à utiliser:

théorème 7: Règle de D'Alembert pour les séries numériques(rappel)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.
On suppose que $\lim\limits_{\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existe. **Alors** :

i. si $l > 1$ alors $\sum u_n$ GDV
ii. si $l < 1$ alors $\sum u_n$ CV
iii. si $l = 1$ alors pas de conclusion quant à la nature de la série

méthode 3: utilisation de la règle de D'Alembert pour déterminer le rayon

La méthode consiste à poser $u_n = |a_n z^n|$ pour $z \neq 0$ fixé et à appliquer la règle de D'Alembert à la série numérique **strictement positive** $\sum u_n$.
Suivant les valeurs de la limite en fonction de z, on en déduit le rayon.

exemple 10:

Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum (n^2 - \ln n) z^n$

- pour $z \neq 0$ fixé, on pose $u_n = |(n^2 - \ln n) z^n|$
- on cherche un équivalent que l'on utilisera pour la limite $u_n \sim n^2 |z|^n$.
  et donc $u_{n+1} \sim (n+1)^2 . z^n = n^2 . z^n$
- On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|(n+1)^2 - ln(n+1)}{|n^2 - \ln n|} . \dfrac{|z|^{n+1}}{|z|^n}$
  mais comme c'est la limite de cette suite qui nous intéresse, on préfère directement écrire grâce aux équivalents précédents

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 |z|^{n+1}}{n^2 |z|^n} = |z|$$

- On peut donc en déduire par la règle précédente que:
  - pour $|z| < 1$, la série $\sum (n^2 - \ln n) z^n$ est ACV
  - pour $|z| > 1$, la série $\sum (n^2 - \ln n) z^n$ est GDV
- d'après le théorème 7 on peut affirmer que $Rayon(\sum (n^2 - \ln n) z^n) = 1$

exemple 11: avec un exposant complexe

Déterminer le rayon des séries entières du type $\sum \dfrac{z^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

Pour $z \neq 0$ fixé, on pose $u_n = |\dfrac{z^n}{n^\alpha}| = \dfrac{|z|^n}{n^{Re(\alpha)}}$ (car $|n^{a+ib}| = |n^a| . |n^{ib}| = n^a . |e^{ib . \ln n}| = n^a$)

$$\text{d'où: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^{Re(\alpha)} |z|}{(n+1)^{Re(\alpha)}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{Re(\alpha)} |z| \to |z|$$

Et donc pour $|z| < 1$ la série est ACV et pour $|z| > 1$ la série est GDV donc $\boxed{R = 1}$

3.3 comparaison

théorème 8: comparaison avec le rayon de SE de référence

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b

1. **Si** $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang , **alors** $R_a \geqslant R_b$
2. **Si** $a_n \sim b_n$ **alors** $R_a = R_b$

   rem: noter ici que le signe n'a pas besoin d'être stable...

méthode 4: utiliser un équivalent et comparer à une série entière connue

On utilise le deuxième point du théorème précédent.

exemple:

Considérons la série entière $\sum(-1)^n.\operatorname{ch} n.z^n$.

- *on sait que* $\operatorname{ch} n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2} \sim \dfrac{e^n}{2}$ *donc* $(-1)^n \operatorname{ch} n \sim \dfrac{(-e)^n}{2}$
- *d'après le théorème ci-dessus on peut affirmer que les séries entières* $\sum(-1)^n.\operatorname{ch} n.z^n$ *et* $\sum \dfrac{(-e)^n}{2} z^n$ *ont le même rayon*
- *or* $\sum \dfrac{(-e)^n}{2} z^n$ *est une série géométrique de raison* $-ez$*, qui converge donc* *si et seulement si* $|ez| < 1$ *c'est à dire* $|z| < 1/e$
- *ci-dessus on a établi que* $\sum \dfrac{(-e)^n}{2} z^n$ *était une série entière de rayon* $1/e$

  Conclusion: $\boxed{\textit{le rayon de } \sum(-1)^n.\operatorname{ch} n.z^n \textit{ est } 1/e}$

Pouvez-vous calculer la fonction somme de cette série entière?

exemple 12:

Déterminer le rayon des deux séries entières suivantes $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}.z^n$ et $\sum \dfrac{n-1}{n}.z^n$

théorème 9: un théorème peu utilisé dans la pratique

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon

exemple 13:

1. Déterminer le rayon de $\sum n^2 z^n$ et de $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$
2. Peut-on appliquer le théorème ci-dessus pour déterminer le rayon de $\sum n^n z^n$?

3.4 somme

théorème 10: rayon de la somme de deux séries entières

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. **Alors** :

i) la série entière somme $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ possède un rayon $R \geqslant \min(R_a, R_b)$

ii) dans le cas où $R_a \neq R_b$ alors le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$

par exemple:
si $R_a = 1$ *et* $R_b = 2$ *alors on peut affirmer que* $R = 1$
si $R_a = 1$ *et* $R_b = 1$ *alors on peut affirmer que* $R \geqslant 1$

démonstration

- Soit z tel que $|z| < \min(R_a,R_b)$

  Ceci signifie que $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$
  et donc que $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries absolument convergentes
  on sait alors que la somme des deux séries, càd $\sum(a_n + b_n).z^n$ est encore une série ACV
  Comme pour tout z tel que $|z| < \min(R_a,R_b)$ on a $\sum(a_n + b_n).z^n$ ACV

  on en déduit que $Rayon(\sum(a_n + b_n).z^n) \geqslant \min(R_a,R_b)$

- Plaçons nous dans le cas $R_a < R_b$.

  Notons $R = Rayon(\sum(a_n + b_n).z^n)$

  On sait d'après ce qui précède que $R \geqslant R_a$
  Soit z tel que $R_a < |z| < R_b$
  On sait alors que $\sum a_n.z^n$ est GDV et que $\sum b_n.z^n$ est ACV
  On peut alors affirmer que $\sum(a_n + b_n).z^n$ est GDV
  Comme pour tout z tel que $R_a < |z| < R_b$ on a $\sum(a_n + b_n).z^n$ GDV
  On en déduit que $R = Rayon(\sum(a_b + b_n).z^n) \leqslant R_a$.

  Au final on a bien montré que $R = Rayon(\sum(a_n + b_n).z^n) = R_a$

exemple 14:
Déterminer suivant $\lambda \in \mathbb{C}$ le rayon de série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(\lambda + \dfrac{1}{n!})z^n$

remarque 3

décomposition d'une série entière en 2 SE à supports disjoints(HP) Soient I et J deux ensembles d'indices infinis tels que $I \cup J = \mathbb{N}$ et $I \cap J = \emptyset$. On a formellement $\sum\limits_{n\in I} a_n z^n + \sum\limits_{n\in J} a_n z^n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.
Notons R_I [resp. R_J] le rayon de $\sum\limits_{n\in I} a_n z^n$ [resp. $\sum\limits_{n\in J} a_n z^n$] .
***Alors** le rayon de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est égal à $\min(R_I,R_J)$*

La preuve de ce résultat n'est pas très compliquée. La voici de manière peu détaillée.

- si $|z| < \min(R_I,R_J)$ alors $\sum\limits_I a_n z^n$ et $\sum\limits_J a_n z^n$ absolument convergentes, et donc $R \geqslant \min(R_I,R_J)$
- si $|z| < R$ alors $\sum\limits_{\mathbb{N}} |a_n z^n|$ converge et donc $\sum\limits_I a_n z^n$ et $\sum\limits_J a_n z^n$ absolument convergentes, d'où $R \leqslant \min(R_I,R_J)$

remarque 4

- *le plus souvent, vous rencontrerez le cas où I désignera l'ensemble des nombres pairs et J celui des nombres impairs.*
- *on a vu qu'une série ACV était commutativement convergente, on pourra donc utiliser cette propriété lorsque z est dans l'intervalle ouvert de convergence*

4 Fonction somme d'une série entière complexe

définition 5: fonction somme d'une série entière

Lorsque la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge, on note $S(z)$ sa somme.

La fonction S ainsi définie est appelée la fonction somme de la série entière.

On a donc : $\boxed{S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$

remarque 5

- $\boxed{\textit{pour } z = 0\textit{, la série converge toujours, et l'on a } S(0) = a_0}$
- *la fonction S est définie à l'aide d'une série : pour nous, c'est une nouvelle manière de définir une fonction.*
- *l'ensemble de définition de la fonction somme S est l'ensemble des complexes z pour lequelles la série $\sum a_n z^n$ est convergente. Il s'agit donc des z qui sont à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon R ainsi que, éventuellement, certains z situés sur le "cercle d'incertitude".*

remarque 6 (*avec les séries entières complexes de référence*)

1. *On a vu que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

   Sa fonction somme est $\boxed{\begin{array}{rcl} S : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) \end{array}}$

2. *On a vu que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ converge pour tout $|z| < 1$ uniquement*

   Sa fonction somme est $\boxed{\begin{array}{rcl} S : B_O(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \end{array}}$ *où $B_o(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.*

   La fonction somme S est définie uniquement sur l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à un: c'est donc la restriction de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ à $B_o(0,1)$

5 Séries entières d'une variable réelle

définition 6: fonction somme d'une série entière

Lorsque la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge, on note $S(x)$ sa somme. La fonction S ainsi définie est appelée la fonction somme de la série entière. On a donc: $\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$

exemple 15: Les trois séries suivantes ont pour rayon un mais...

- La série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ a pour intervalle de convergence $]-1,+1[$
- La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ a pour intervalle de convergence est $[-1,+1[$
- La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ a pour intervalle de convergence $[-1,+1]$

et elles ont le même intervalle ouvert de convergence, à savoir $]-1,+1[$

définition 7: intervalle de convergence, intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière réelle, de rayon R.

1. On appelle intervalle de convergence l'ensemble de définition de la fonction S, c'est-à-dire:
   (a) Si $R = 0$, l'intervalle de convergence est $\{0\}$
   (b) Si $R = \infty$, l'intervalle de convergence est $\mathbb{R}$
   (c) Si R est un réel strictement positif, l'intervalle de convergence sera ou $]-R, +R[$, ou $]-R, +R]$, ou $[-R, +R[$, ou $[-R, +R]$
   (c'est l'étude en $\pm R$ qui permet de déterminer en quel cas on se trouve)
2. On appelle intervalle ouvert de convergence l'intervalle $]-R, +R[$ (lorsque $R \neq 0$)

rem: l'intervalle ouvert de convergence est particulièrement important pour une série entière, car le théorème de dérivation terme à terme (voir plus loin) ne s'applique que sur cet intervalle!

5.1 Exemples de référence

Dans le tableau ci-dessous, α désigne un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (réel non entier)

série entière	rayon	somme sur l'intervalle ouvert de convergence
$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞	$\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n x^n$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$
$\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
$1 + \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	$\forall x \in]-1, +1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$	1	$\forall x \in]-1, +1[, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

remarque 7

- *Noter bien que les égalités ne nous sont fournies que sur l'intervalle ouvert $]-R, +R[$.*
- *Que se passe-t-il pour $\alpha \in \mathbb{N}$?*

exemple 16: classique

Vérifier que $\forall x \in]-1, +1[, \sqrt{1+x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)} \binom{2n}{n} x^n$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} x^n$

5.2 Propriétés (admises) de la fonction somme d'une série entière réelle

Dans tout ce paragraphe, on considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R non nul.

- On note S sa fonction somme, on a donc $\forall x \in]-R,+R[, S(x) = \sum a_n x^n$.
- N'oublions pas que la fonction S est peut-être aussi définie en $+R$ ou/et $-R$

remarque 8

- *Il ne faut surtout pas écrire, dire ou penser qu'une série entière est un polynôme de degré infini! (Une fonction polynomiale est tojours définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors que la fonction somme d'une série entière ne l'est pas forcément,...)*
- *Les théorèmes qui suivent sont difficiles à démontrer (notion hors-programme de convergence uniforme) bien que leur contenu semble relever du bon sens (se méfier du bon sens en mathématiques!). En effet, la somme infinie de fonctions continues[dérivables] n'est pas nécessairement une fonction continue[dérivable] (cf. exemple 2).*

Les résultats à retenir (détaillés plus loin) sont:

i) la fonction somme d'une série entière est infiniment dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.

ii) sur son intervalle ouvert de convergence, la dérivée de la fonction somme s'obtient par dérivation terme à terme

théorème 11: continuité sur l'intervalle ouvert de convergence(admis)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$.
Sa fonction somme est continue sur son intervalle ouvert de convergence $]-R,+R[$
rem: on verra un plus tard que la fonction somme y est même C^∞ !

théorème 12: continuité aux bornes - Hors-Programme

- **si** $\sum a_n R^n$ converge **alors** la fonction S est continue en R, donc sur $]-R,+R]$
- **si** $\sum a_n (-R)^n$ converge **alors** la fonction S est continue en $-R$, donc sur $[-R,+R[$

remarque 9 (***interprétation du théorème comme double limite***)

- *Soit $b \in]-R,+R[$. Dire que la fonction S est continue en b revient à dire que $\lim\limits_{x\to b} S(x) = S(b)$,*

  soit encore que $\boxed{\lim\limits_{x\to b}\left(\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right) = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n b^n\right) = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to b}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right)}$
- *Ainsi la démonstration du théorème consiste à montrer que $\lim\limits_{x\to b}\lim\limits_{N\to\infty}(\dots) = \lim\limits_{N\to\infty}\lim\limits_{x\to b}(\dots)$*

théorème 13: intégration terme à terme (admis)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme notée S. Alors:

$$\forall (a,b) \in]-R,+R[^2, \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right)$$

rem: "on peut intégrer terme à terme une série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence"

exemple 17:

Ecrire $\int_0^1 e^{t^2} dt$ comme somme d'une série numérique.

- On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

  On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$

  Ceci prouve que $Rayon(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}) = R = +\infty$
- Comme $(0,1) \in]-R,+R[^2$, on peut affirmer d'après le théorème d'intégration terme à terme

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{t^2} dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{n!} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right]_0^1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}
\end{aligned}$$

théorème 14: classe C^∞ et dérivation terme à terme (admis)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme notée S. Alors:

i) la fonction S est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,+R[$

ii) la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et la série dérivée $\sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n$ ont même rayon de convergence

iii) $\forall x \in]-R,+R[, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}$

exemple 18:

Soit la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$

Justifier que la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$!

- Soit $x \neq 0$.
  On a
  $$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \dots$$
  Comme la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge pour tout $x \neq 0$ on sait que son rayon R est infini.
- Notons S sa fonction somme.
  On sait par théorème que S est une fonction C^∞ sur $]-R,+R[=\mathbb{R}$.

  Or $S(0) = 1 = f(0)$ et $\forall x \neq 0, S(x) = f(x)$!

  Ainsi $S = f$ et l'on a bien montré que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$!

remarque 10

- *le troisième point s'écrit encore que sur $]-R,+R[$:*
  $$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}$$
  On dit que <u>pour obtenir la dérivée de la somme d'une série entière il suffit de la dériver terme à terme.</u>
- *Sans utiliser le signe Σ, le résultat du théorème s'écrit simplement :*
  $$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots\right)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$
- *On savait déjà que pour les polynômes on avait:*
  Si $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ alors $P'(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} i.a_i.X^{i-1} = \sum\limits_{j=0}^{n-1} (j+1).a_{j+1}.X^j$

exemple 19:

A l'aide de leurs développements en série entière,
retrouver la dérivée de la fonction exp et de la fonction sh

exemple 20: une démo de cours

On s'intéresse à la série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{n}$ et on note S sa fonction somme.
On admettra que son rayon vaut $R = 1$

1. Calculer $S'(x)$ en indiquant pour quelles valeurs de x le calcul est validé.
2. Justifier que $\forall x \in]-1,+1[, S(x) = \ln(1+x)$

exemple 21: Très classique! A retenir!

Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum_{n=0}^{\infty} n.x^n$ et de $\sum_{n=0}^{\infty} n^2.x^n$

exemple 22:

Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n}{2n+1}.x^{2n+1}$

théorème 15: formule de la dérivée p-ième

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$ et de fonction somme notée S. Alors:

i) pour tout $p \geqslant 1$ et tout $x \in]-R,+R[$ on a

$$\boxed{S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n}$$

ii) on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}}$

exemple 23:

Donner la valeur de la dérivée $p-$ième en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+2x)$

5.3 Développement en série entière

définition 8: fonction développable en série entière

Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$, et f une fonction de $I \to \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est développable en série entière (DSE) au voisinage de 0 lorsqu' il existe un réel $\alpha > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon non nul tels que $\forall x \in]-\alpha,+\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

rem: il est implicite que $(Rayon(\sum a_n.x^n) \geqslant \alpha)$

remarque 11

- *On rappelle qu'un voisinage du réel x_0 est une partie de $\mathbb{R}$ (i.e. sous-ensemble de $\mathbb{R}$) qui contient un intervalle ouvert centré en x_0. Par exemple, $]-2,-1] \cup [0,+\infty[$ est un voisinage de 3 mais n'est pas un voisinage de 0*
- *La définition précédente est encore équivalente à : la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu' il existe un voisinage V de 0 et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon non nul tels que $\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*
- *D'après cette définition, il n'est pas nécessaire qu'une fonction soit égale à une série entière sur tout son ensemble de définition. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ mais elle n' est égale à sa série entière que sur $[-1,1]$. Comme il s'agit d'un voisinage de 0, on dit que la fonction arctan est DSE. (même remarque avec la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$)*
- *Si on veut développer en série entière une fonction f en un point x_0 autre que 0, on développe la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ en 0*

exemple 24:

1. Expliquer pourquoi la fonction partie entière et la fonction valeur absolue ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0.
2. Montrer que les fonctions suivantes sont DSE au voisinage de zéro et donner leur développement.
$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{4+x}$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)(2+x)}$, $f_3 : x \mapsto \ln(3-x^2+2x)$, $f_4 : x \mapsto e^x.\sin x$

méthode 5: comment trouver un DSE I

On utilise les séries entières de référence et on effectue des changements de variable et/ou des combinaisons linéaires.

$$f_1 : x \mapsto \ln(1+3x^2) \qquad f_2 : x \mapsto \ln(2+3x^2) \qquad f_3 : x \mapsto \cos^2 x \qquad f_4 : x \mapsto \cos^3 x$$

méthode 6: comment trouver un DSE II

On utilise les séries entières de référence que l'on dérive.
Ecrire les fonctions $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^k}$ à l'aide de séries entières pour $x \in]-1,+1[$ pour $k = 2,3,4$?

méthode 7: comment trouver un DSE III

On utilise les séries entières de référence que l'on intègre.
exemple:

- On sait que $\forall x \in]-1,+1[, \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$
- On en déduit que $\forall x \in]-1,+1[, \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$
- La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ a pour rayon un car elle converge sur $]-1,+1[$ et diverge grossièrement pour $x=1$
- Fixons nous un réel $X \in]-1,+1[$ quelconque. D'après le théorème précédent, on peut affirmer:

$$\int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^X \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^X (-1)^n x^{2n} dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{X^{2n+1}}{2n+1}$$

- On vient de montrer que $\boxed{\forall X \in]-1,+1[, \arctan X = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{X^{2n+1}}{2n+1}}$

exemple 25: DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout x réel on note $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$

1. Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, donner le DSE de f_α et son rayon.
Dans la suite on supposera que $\alpha \notin \mathbb{N}$
2. Déterminer la série de Taylor de f. Quel est le rayon de cette série entière?
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_α et montrer que sa série de Taylor vérifie la même équation différentielle. (on précisera sur quel intervalle)
4. Justifier que f_α est DSE et retrouver le résultat de cours

définition 9: série de Taylor

f étant une fonction de classe C^∞ sur un intervalle contenant 0,
on appelle série de Taylor de f la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

théorème 16: unicité du DSE

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0.
Alors : il existe une unique série entière égale à f au voisinage de 0
c'est

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

"si une fonction est DSE alors son développement est sa série de Taylor"

En effet, si $\forall x \in]-\alpha, +\alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *alors* f *coïncide avec la fonction somme* S *de la série entière sur cet intervalle et l'on a d'après le théorème 15* $\boxed{a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}}$. *cqfd*

théorème 17: parité... là aussi!

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$

i) $\forall x \in]-R, R[, S(-x) = S(x)$ **si et seulement si** pour tout entier n impair $a_n = 0$

ii) $\forall x \in]-R, R[, S(-x) = -S(x)$ **si et seulement si** pour tout entier n pair $a_n = 0$

Pour démontrer cette proposition on utilise les résultats connus suivants:

- *si* f *est paire alors* f' *est impaire*
- *si* f *est impaire alors* f' *est paire*

Et on en déduit immédiatement que

- *si* f *est paire alors* $f', f^{(3)}, f^{(5)}, \ldots$ *(les dérivées d'ordre impair) sont impaires et donc s'annulent en* 0
- *si* f *est impaire alors* $f'', f^{(4)}, f^{(6)}, \ldots$ *(les dérivées d'ordre pair) sont impaires et donc s'annulent en* 0

méthode 8: utiliser une équation différentielle pour trouver un DSE

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0

1. Analyse
   - On commence par déterminer une équation différentielle linéaire satisfaite f
   - On suppose que f est DSE et on cherche une série entière inconnue de rayon non nul qui vérifie l'équation différentielle. On s'aide des conditions initiales.
2. Synthèse
   - On vérifie que le rayon de la série trouvée est non nul
   - On applique le théorème d'existence et d'unicité de la solution à un problème de Cauchy

exemple 26:

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n$

1. Déterminer le rayon de cette série entière.
2. Justifier que f vérifie sur $]-1, +1[$ l'équation différentielle $(1-x)y' - (p+1)y = 0$
3. En déduire une expression simple de f

6 Produit de Cauchy

remarque 12 (*rappel: produit de Cauchy de deux séries numériques*)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum w_n$ avec pour tout entier $n \geqslant 0, w_n = \sum_{j=0}^{n} u_j v_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} v_j$

théorème 18: rayon du produit de deux séries entières

1. Le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ avec $\boxed{c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j.b_{n-j}}$ pour tout $n \geqslant 0$
2. si on note R_a le rayon de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, R_b le rayon de la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, et R_p le rayon de la série produit alors
   - pour $|z| < \min(R_a,R_b)$, les trois séries sont ACV et $\boxed{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}$
   - la série produit est de rayon $R_p \geqslant \min(R_a,R_b)$

démonstration:

Soit z tel que $|z| < \min(R_a,R_b)$

Notons $u_n = a_n.z^n$ et $v_n = b_n.z^n$

Comme $|z| < R_a$ on sait que $\sum u_n$ est ACV

et comme $|z| < R_b$ on sait que $\sum v_n$ est ACV.

Notons $\sum w_n$ la série numérique produit de Cauchy des sériens numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Par définition, on sait que pour tout $n \geqslant 0$

$w_n = \sum_{j=0}^{n} u_j.v_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j.z^j.b_{n-j}.z^{n-j} = (\sum_{j=0}^{n} a_j.b_{n-j}).z^n = c_n.z^n$

Par théorème, comme $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV on sait que

$\sum w_n$ est ACV et que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$

On a donc montré que $\sum c_n z^n$ est ACV et que $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

On a montré que pour tout $|z| < \min(R_a,R_b)$ la série $\sum c_n z^n$ est ACV,

ce qui permet d'affirmer que $Rayon(\sum c_n z^n) \geqslant \min(R_a,R_b)$

exemple 27:

A l'aide d'un produit de Cauchy, écrire $\frac{1}{(1-z)^2}$ puis $\frac{1}{(1-z)^3}$ sous la forme d'une somme de série entière

- Notons $\sum c_n z^n$ le produit de Cauchy des SE $\sum a_n.z^n$ et $\sum b_n.z^n$ avec $\forall n \geqslant 0, a_n = b_n = 1$.

  Par définition, on a $\forall n \geqslant 0, c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} 1.1 = (n+1)$

  Comme $Rayon(\sum z^n) = 1$, on peut affirmer par théorème que $Rayon(\sum(n+1).z^n) \geqslant 1$

  et que pour $|z| < 1$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1).z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \frac{1}{1-z}.\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

  rem: comme pour $z = 1$ la série $\sum(n+1).z^n$ est GDV, on a $Rayon(\sum(n+1).z^n) \leqslant 1$

  Au final, on a $Rayon(\sum(n+1).z^n) = 1$

- Notons $\sum d_n z^n$ le produit de Cauchy des SE $\sum c_n.z^n$ et $\sum a_n.z^n$

  Par définition, on a $\forall n \geqslant 0, d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k.a_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} k+1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

  Comme $Rayon(\sum a_n z^n) = Rayon(c_n z^n) = 1$, on peut affirmer par théorème que $Rayon(\sum d_n z^n) \geqslant 1$

  et que pour $|z| < 1$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \frac{1}{(1-z)^2}.\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^3}$$

exemple 28:

On considère la suite (c_n) définie par $\forall n \geqslant 0, c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{1}{j!}$

Déterminer le rayon et la fonction somme de $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n z^n$

7 Annexe

proposition 1

1. ***S'il*** *existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z_0^n$ converge,* ***alors*** *pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.*
2. ***S'il*** *existe $z_1 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z_1^n$ diverge,* ***alors*** *pour tout z tel que $|z| > |z_1|$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est grossièrement divergente (terme général même pas borné).*

démonstration 1 (***prélude à la démonstration du théorème 1***)

Montrons que l'ensemble $E = \{r \geqslant 0 |$ *la suite* $(|a_n|.r^n)_{n \geqslant 0}$ *soit majorée*$\}$ *est un intervalle.*

- *Il est clair que* $0 \in E$ *et que c'est son plus petit élément.*
- *Pour montrer que* E *est un intervalle (c'est à dire d'un seul tenant) nous allons montrer que pour tout* $b \in E$ *fixé et tout* c *fixé dans le segment* $[0,b]$ *on a* $c \in E$
- *Soit* $b \in E$ *fixé.*
  Par définition de E *ceci signifie qu'il existe un* $M > 0$ *tel que* $\forall n \geqslant 0, |a_n|.b^n \leqslant M$
  Considérons maintenant un c *quelconque dans le segment* $[0,b]$.
  Comme $0 \leqslant c \leqslant b$, *on a* $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant c^n \leqslant b^n$ *et donc* $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant |a_n|.c^n \leqslant |a_n|.b^n$
  On vient de prouver que $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant |a_n|.c^n \leqslant M$,
  c'est à dire que la suite $(|a_n|.c^n)$ *était majorée. C'est la définition de* $c \in E$ *! cqfd*

Nous venons de prouver que E *est un intervalle du type* $[0,R[$ *ou* $[0,R]$ *(avec* $R \geqslant 0$*) ou bien* $[0,+\infty[$

démonstration 2 (***démonstration du théorème 1***)

1. $\boxed{R = +\infty \iff \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n \text{ converge absolument pour tout } z \in \mathbb{C}}$

   (a) <u>*On suppose que* $R = +\infty$</u>
   On est ainsi dans le cas où $E = [0,+\infty[$, *c'est à dire pour tout réel* $r \geqslant 0$ *la suite* $(a_n r^n)$ *est majorée.*
   Soit z *un complexe quelconque.*
   En choisissant $r = |z| + 1$ *et en appliquant le lemme d'Abel on justifie que* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*

   (b) <u>*On suppose que* $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$.</u>
   On sait donc que pour tout $z \in \mathbb{C}$ *le terme général tend vers* 0. *Or une suite convergente étant forcément bornée, on peut affirmer que la suite* $(a_n z^n)$ *est une suite bornée.*
   On vient bien de prouver que pour $r \geqslant 0$ *la suite* $(|a_n| r^n)$ *était majorée, c'est à dire que* $E = [0,+\infty[$. *Or* $R = \sup E$ *donc* $R = +\infty$

2. $\boxed{R = 0 \iff \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n \text{ ne converge que pour } z = 0}$

   (a) <u>*On suppose que* $R = 0$</u>
   On est ainsi dans le cas où $E = \{0\}$, *c'est à dire que pour tout* $r > 0$ *la suite* $(|a_n| r^n)$ *n'est pas majorée.*
   Soit z *un complexe non nul.*
   On peut affirmer que la suite $(|a_n z^n|) = (|a_n|.|z|^n)$ *n'est pas majorée.*
   De cela on en déduit que l'on ne peut avoir $\lim a_n z^n = 0$ *et donc* $\sum a_n z^n$ *est grossièrement divergente*

   (b) <u>*On suppose que* $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *ne converge que pour* $z = 0$</u>
   Nous allons montrer que $E = \{0\}$. *Pour cela on va tenir un raisonnement par l'absurde.*
   On suppose qu'il existe un $r > 0$ *tel que la suite* $(a_n.r^n)$ *soit majorée.*
   D'après le lemme d'Abel, comme $0 < \dfrac{r}{2} < r$, *on peut affirmer que la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente pour* $z = \dfrac{r}{2}$.
   On aboutit à une contradiction car la série entière ne converge que pour 0 par hypothèse. cqfd!

3. $\boxed{R \in \mathbb{R}_*^+ \iff \begin{cases} \text{si } |z| < R \quad \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est absolument convergente} \\ \text{si } |z| > R \quad \text{alors } \sum a_n z^n \text{ est grossièrement divergente} \end{cases}}$

   démonstration en classe

exemple 29:

Déterminer la somme de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)!}$

- L'idée consiste à prévoir les simplifications successives avec les factorielles.
- On écrit: $n^2+1 = (n+2)(n+1) - 3(n+2) + 5$
- On a pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\frac{n^2+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)(n+1) - 3(n+2) + 5}{(n+2)!} = \frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} + \frac{5}{(n+2)!}$$

- On va calculer la somme de chacune des 3 séries. On a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
- et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!} = 3(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1) = 3(e-1)$
- enfin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+2)!} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n!} = 5(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}) = 5(e-2)$
- Au final, on a la somme de trois séries convergentes et:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+2)!} = e - 3(e-1) + 5(e-2) = 3e - 7$$

Une autre idée consiste à effectuer des changements d'indices successifs

- En posant $p = n+2$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p-2)^2+1}{p!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p^2-4p+5}{p!} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p^2}{p!} - 4\sum_{p=2}^{\infty} \frac{p}{p!} + 5\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!}$$

- on a $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = e - 2$
- et $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p}{p!} = \sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} = \sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} = e - \frac{1}{0!} = e - 1$ (en ayant posé $q = p-1$)
- $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p^2}{p!} = \sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p}{(p-1)!} = \sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{q+1}{q!} = \sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q-1)!} + \sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!}$ (on a posé $q = p-1$)
  - or $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} = e - 1$
  - et $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q-1)!} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$ (en posant $i = q-1$)

  et donc $\sum\limits_{p=2}^{\infty} \frac{p^2}{p!} = e + e - 1 = 2e - 1$
- Au final, on trouve également que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)!} = 2e - 1 - 4(e-1) + 5(e-2) = 3e - 7$$