REDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARREES

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes, E désignera un $\mathbb{K}$- espace vectoriel (le plus souvent, de dimension finie n) et f un endomorphisme de E

- On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de $E \to E$

1 Sous-espaces stables, endomorphismes induits

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et f un endomorphisme de E

définition 1:

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et f un endomorphisme de E.
Soit F un sev de E

i) On dit que <u>F est un sev stable par f</u> lorsque $f(F) \subset F$, càd $\forall x \in F, f(\vec{x}) \in F$

ii) On appelle <u>restriction de l'application f à F</u> l'application $f\big|_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}$

Dans le cas où F est stable par f, la restriction de f à F est alors un endomorphisme de F. (il est appelé endomorphisme induit)

E et $\{\vec{0}\}$ sont toujours des sev stables

exemple 1: classique, à avoir en tête

Avec les notations ci-dessus, déterminer le noyau de $f\big|_F$ en fonction de F et $\ker(f)$

exemple 2: résultats à retenir

Soit f un endomorphisme de E.
Montrer que $\mathrm{Im}(f), \ker(f)$ et les sep de f sont stables par f.

théorème 1:

Soit F un sev de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une famille génératrice de F.
Il y a équivalence entre:

i) F est stable par f

ii) $\forall i \in [\![1,p]\!], f(\vec{e}_i) \in F$

rem: on retrouve l'idée qu'en dimension finie, si une base ou une famille génératrice possède une propriété alors celle-ci se généralise à tous les vecteurs

théorème 2:

Soit E un ev de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$
Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, et p un entier.
Il y a équivalence entre:

i) $\mathrm{vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est stable

ii) la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $\boxed{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$

Cela provient tout simplement
de l'écriture matricielle

exemple 3:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Donner 8 sev évidents stables par f

proposition 1 (*droite vectorielle stable*)

Soit $\vec{a}$ un vecteur non nul de E. Il y a équivalence entre:

i) la droite $D = \operatorname{vect} \vec{a}$ est stable par f

ii) $\vec{a}$ est un vecteur propre de f

Ainsi déterminer les droites vectorielles stables par f revient à déterminer les vecteurs propres de f

exemple 4:

Soit $F = \operatorname{vect}(e_1,e_2)$ un plan vectoriel inclus dans E.
A-t-on l'équivalence

$$F \text{ est stable par } f \iff e_1 \text{ et } e_2 \text{ sont vecteurs propres de } f$$

2 Endomorphismes diagonalisables (cas où $\dim E$ finie) V041 et V064

définition 2:

On dit que <u>l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable</u> lorsqu' il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
déterminer si un endomorphisme est diagonalisable, c'est déterminer si, parmi toutes les matrices associées à cet endomorphisme, l'une au moins est une matrice diagonale.
On a déjà vu que les homothéties, les symétries vectorielles et les projections sont des endomorphismes diagonalisables

exemple 5:

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,2y) \end{array}$

On note $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (1,1)$

1. Montrer que (e_1,e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$
2. Donner la matrice de f dans cette base. Conclusion?

exemple 6:

L'endomorphisme f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = X^2.P^{(2)}$ est-il un endomorphisme diagonalisable?

théorème 3:

Il y a équivalence entre :

i.) f est diagonalisable

ii.) il existe une base de E formée de vecteurs propres de f

dans ce cas, les coefficients diagonaux des matrices diagonales associées à f sont les valeurs propres de f comptées avec leur multiplicité.

démonstration du théorème 3:

. $\boxed{i) \Longrightarrow ii)}$ On suppose que f est diagonalisable

Il existe ainsi $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit une matrice diagonale.

existe donc $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$

On a ainsi $\forall i \in [1,n], f(e_i) = d_i.e_i$

avec $e_i \neq 0$ car le vecteur nul ne peut appartenir à une base.

On a bien montré que les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de f, càd que $\mathcal{B}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f.

. $\boxed{ii) \Longrightarrow i)}$ On suppose qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ cette base

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons λ_i la valeur propre associée à e_i

On a donc $f(e_i) = \lambda_i.e_i$

et ainsi $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Il existe bien une base E pour laquelle la matrice de f est diagonale

théorème 4: condition suffisante de diagonalisabilité, deux formulations possibles

1. **Si** $\dim E = n$ et si f posséde n valeurs propres distinctes **alors** f est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension un.
2. **Si** χ_f est scindé et n'admet que des racines simples **alors** f est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension un.

Bien noté qu'il s'agit juste d'une condition suffisante et non d'une cns !

démonstration:

1. On suppose que $\dim E = n$ et que f possède n valeurs propres distinctes.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes

Notons $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ des $\vec{v}$.p respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

On peut déjà affirmer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est une famille libre de E,

en effet, on sait par théorème, que: "une famille de $\vec{v}$.p associés à des vp distinctes est libre."

Comme $card(\mathcal{F}) = n = \dim E$ et que $\mathcal{F}$ est une famille libre de E,

on peut par théorème affirmer que $\mathcal{F}$ une base de E.

On a justifié qu'il existe une base de E formée de $\vec{v}p$ de f, càd que f est diagonalisable.

exemple 7:

Soit $\boxed{\begin{array}{lccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-21x + 8y, -48x + 19y) \end{array}}$.

1. Montrer que f est diagonalisable, et donne une matrice diagonale associée à f
2. Calculer $f^{2022}((1,3)), f^{2022}((1,2))$ et $f^{2022}((2,5))$ 2. en classe

théorème 5: condition nécessaire de diagonalisabilité

Si f est diagonalisable alors $\chi_f(X)$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$

théorème 6: CNS de diagonalisabilité

Soit f un endomorphisme de E. On note $sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ son spectre.
Alors, il y a équivalence entre :

i.) f est diagonalisable

ii.) le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute vp λ de f, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$

iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} = \dim E$

iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$
càd

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! \, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_p} \,|\, \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p$$

rem: f est diagonalisable ssi tout élément de E peut s'écrire de manière unique comme une somme de vecteurs propres de f.

exemple 8:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_f(X) = (X-1)(X-2)(X-\alpha)$.
Etudier la diagonalisabilité de f.

exemple 9:

Soit E un $\mathbb{K}-$ev et f un endomorphisme de E tel que $\chi_f(X) = X^2 + 1$

1. Donner $\dim E$
2. f est-il diagonalisable?

exemple 10:

Notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X(P' + P'' + \cdots + P^{(n)}) \end{array}}$
Montrer que f est diagonalisable.

exemple 11:

Soit f un endomorphisme de E diagonalisable de spectre $\{0,1,2\}$.
Montrer que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$
Montrer que $f^4 = 7f^2 - 6f$.
En déduire f^5 et f^{100}

exemple 12: classique

Soit f un endomorphisme de E ne possédant qu'une unique valeur propre.
Montrer l'équivalence :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff f \text{ est une homothétie}$$

exemple 13:

L'endomorphisme $\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y+4z, 2y+5z, 2z) \end{array}}$ est-il diagonalisable?

méthode 1: Comment déterminer si un endomorphisme est diagonalisable

1. on détermine le spectre de f, par exemple à l'aide du polynôme caractéristique
2. on détermine la dimension de chaque sous-espace propre. (pour les vp multiples)
3. on conclut à l'aide du théorème 6

Exemple:

Considérons $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z,-2x+4y+2z,-x+y+3z) \end{array}}$

- *On trouve* $\chi_f(X)=(X-4)(X-2)^2$*. Ainsi 4 est vp simple et 2 vp double*
- *4 étant valeur propre simple on sait que, sans calcul, son sep est de dimension un*
- *par le calcul, on trouve que* E_2 *est le plan d'équation* $-x+y+z=0$ *on a donc* $\dim(E_2)=2$
- *Pour justifier le fait que* f *soit diagonalisable on peut alors*
  - *soit dire que* $\dim E_4+\dim E_2=1+2=3=\dim\mathbb{R}^3$ *et conclure grâce au point iii)*
  - *soit dire que le polynôme est scindé sur* $\mathbb{R}$ *et que pour chaque vp sa multiplicité est égale à la dim du sep associé, et conclure grâce au point ii)*

remarque 1

On a vu que pour tout endomorphisme de E*, on a toujours*

$$\boxed{\sum_{\lambda_i\in sp(f)}\dim E_{\lambda_i}=\dim E_{\lambda_1}+\cdots+\dim E_{\lambda_p}\leqslant\dim E}$$

Le théoréme 6 affirme qu'il y a égalité ssi l'endomorphisme est diagonalisable.

exemple 14:

Soit $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+z+t,x+y+z+t,x+y+z+t,x+y+z+t) \end{array}}$.

Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

méthode 2: Comment déterminer une base de vect. propres lorsque f est diagonalisable

- On commence par déterminer une base de chaque sep
- Puis on concaténe ces bases précédentes: cela fournit une base de E formée de $\vec{v}.p$ de f

Exemple:

On reprend l'exemple de la méthode 1

- *une base de* E_4 *est* ((1,2,1))
- *une base de* E_2 *est* ((1,1,0),(1,0,1))
- *comme* f *est diagonalisable on sait que* $E_4\oplus E_2=\mathbb{R}^3$*, et ainsi que la concaténation des deux bases précédentes est une base de* $\mathbb{R}^3$.
- *dans la base* (((1,2,1),(1,1,0),(1,0,1)) *la matrice de* f *est* $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$
- *on peut permuter l'ordre des vecteurs dans la base: cela reste une base formée de* $\vec{v}.p$
- *dans la base* (((1,0,1),(1,1,0),(1,2,1)) *la matrice de* f *est* $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

méthode 3: comment connaître la dim d'un sep sans le déterminer

Soit f un endomorphisme et λ une de ses vp.
On peut connaître $\dim(E_\lambda) = \dim\ker(f-\lambda id)$ en appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme $f-\lambda id$. (pour cela on peut considérer le rang d'une matrice associée à $f-\lambda id$)
Exemple:

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & g \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $a = g = 0$.

3 Matrices diagonalisables: V065 et V066

définition 3:

On dit que la matrice A est diagonalisable lorsque l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

théorème 7:

il y a équivalence entre :

i.) A est diagonalisable

ii.) A est semblable à une matrice diagonale

Déterminer si une matrice est diagonalisable c'est donc déterminer si, parmi toutes les matrices qui lui sont semblables, l'une au moins est une matrice diagonale.
les matrices diagonales sont des matrices diagonalisables! (à démontrer)

démonstration

Notons

- f l'endo. cano. asso. à A
- $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ On suppose que A est diagonalisable.

Comme A est diagonalisable, on sait que f est diagonalisable,
càd qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ avec D est une matrice diagonale.
Comme A et D sont associées au même endomorphisme,
on sait que A et D sont semblables.
On a bien montré que A est semblable à une matrice diagonale.

$\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ On suppose que A est semblable à une matrice diagonale D

Comme A est une matrice associée à f
ceci signifie que D est aussi une matrice associée à f.
Autrement dit, qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$.
Ceci est la définition de "f est diagonalisable",
ce qui est la définition de "A est diagonalisable".

remarque 2 (***important***)

Très souvent, on ne reviendra pas à l'endomorphisme canoniquement associé pour étudier la diagonalisabilité de la matrice A.

On utilisera alors les équivalences

$$A \text{ diagonalisable} \Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \text{ diagonale tels que } A = P.D.P^{-1}$$

remarque 3 (***les matrices diagonales sont des matrices diagonalisables!***)

En effet: Soit A une matrice diagonale.

On sait que A est semblable à elle-même... donc A est semblable à une matrice diagonale!

exemple 15:

Montrer que si A est une matrice diagonalisable alors A^T est une matrice diagonalisable.

théorème 8: condition suffisante de diagonalisabilité, 2 formulations possibles

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et chaque sep est de dimension un
2. Si χ_A est scindé et n'admet que des racines simples alors A est diagonalisable et chaque sep est de dimension un

théorème 9: CNS de diagonalisabilité

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.
Alors il y a équivalence entre :

i.) A est diagonalisable

ii.) le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute vp λ de A, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$

iii.) $\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_p} = n$

iv.) $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = \mathbb{K}^n$

càd

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \exists!\, (X_1, \ldots, X_p) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_p} \,|\, X = X_1 + \cdots + X_p$$

Comme on l'a déjà dit, il est d'usage d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

exemple 16: sans presque aucun calcul

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

méthode 4: comment "diagonaliser" une matrice diagonalisable

Dans le cas où A est une matrice diagonalisable, on peut écrire $\boxed{A = P.D.P^{-1}}$ avec D matrice diagonale et P matrice inversible. Pour déterminer ces matrices, il suffit :

1. de déterminer les valeurs propres de A
2. de déterminer une base de chacun des sous-espaces propres
   (On sait que la concaténation de ces bases donne une base de $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = \mathbb{K}^n$)
3. de choisir pour D n'importe quelle matrice diagonale ayant comme coefficients diagonaux les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité.
4. d'écrire les coordonnées des vecteurs propres composant la base des sous-espaces propres, en prenant bien soin de respecter l'ordre avec lequel on a placé les valeurs propres dans la matrice diagonale !

exemple 17:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Un calcul nous donne les éléments propres de A :

$$\boxed{sp(A) = \{0,3\} \qquad E_0 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \text{vect}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}}$$

On peut alors écrire A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$ avec :

P	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$				$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
D	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

exemple 18:

Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

exemple 19: classique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice possédant une unique valeur propre λ.
Montrer que A est diagonalisable ssi $A = \lambda.I_n$

théorème 10: qui rassemble des propriétés vues dans plusieurs chapitres

Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant, même rang
et même polynôme caractéristique.

remarque: comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, on en déduit qu'elles ont les mêmes valeurs propres comptées avec les mêmes multiplicités.

Question: deux matrices semblables ont-elles les mêmes vecteurs propres? les mêmes sous-espaces propres?

4 Trigonalisation

4.1 Endomorphismes trigonalisables V043

définition 4:

On dit que f est trigonalisable lorsque il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est triangulaire supérieure.

déteminer si un endomorphisme est trigonalisable, c'est déterminer si parmi toutes les matrices qui lui sont associées l'une au moins est triangulaire supérieure.

remarque 4

si f est diagonalisable alors f est trigonalisable

exemple 20:

Soit $\boxed{\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x+y,y-x) \end{array}}$

On note $e_1 = (1,-1)$ et $e_2 = (-1,2)$

1. Ecrire la matrice de f dans la base (e_1,e_2)
2. Ecrire la matrice de f dans la base (e_2,e_1)

théorème 11:

Il y a équivalence entre:

i) f est trigonalisable

ii) il existe une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ de E telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], f(\vec{e}_k) \in \mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k})$

à noter que dans ce cas, $\vec{e}_1$ est un vecteur propre de f

démonstration dans le cas $n = 3$

Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de E.

On a les équivalences suivantes

$$\forall k \in [\![1,3]\!], f(e_k) \in \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_k) \iff \begin{cases} f(e_1) & \in \mathrm{vect}(e_1) \\ f(e_2) & \in \mathrm{vect}(e_1,e_2) \\ f(e_3) & \in \mathrm{vect}(e_1,e_2,e_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists a_{11} \in \mathbb{R}, f(e_1) = a_{11}.e_1 \\ \exists (a_{12},a_{22}) \in \mathbb{R}^2, f(e_2) = a_{12}.e_1 + a_{22}.e_2 \\ \exists (a_{13},a_{23},a_{33}) \in \mathbb{R}^3, f(e_3) = a_{13}.e_1 + a_{23}.e_2 + a_{33}.e_3 \end{cases}$$

$$\iff \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

démonstration dans le cas général

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

On a les équivalences:

$$\begin{aligned}
&\forall k \in [\![1,n]\!], f(e_k) \in \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_k)\\
\iff&\forall k \in [\![1,n]\!], \exists (a_{ik})_{1\leqslant i\leqslant k} \in \mathbb{K}^k, f(e_k) = a_{1k}.e_1 + a_{2k}.e_2 + \dots + a_{kk}.e_k\\
\iff&\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & & 0 & a_{kk} & & a_{kn}\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

remarque 5

1. *Si f est trigonalisable alors f possède nécessairement une valeur propre.*
2. *f est trigonalisable ssi il existe une base de E pour laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure*

théorème 12: à utiliser quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (admis)

f est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
(c'est à dire χ_f peut s'écrire comme produit de polynômes de degré un à coefficients dans $\mathbb{K}$)

Dans la démonstration, on montre que, quand f est trigonalisable, les coefficients diagonaux de sa matrice triangulaire sont les valeurs propres de f comptées avec leurs multiplicités.

démonstration d'une implication seulement

On suppose que f est trigonalisable sur $\mathbb{K}$

Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & & 0 & a_{kk} & & a_{kn}\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix} \qquad \text{avec les } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Ainsi $\chi_f(X) = (X - a_{11})(X - a_{22})\dots(X - a_{nn})$

théorème 13:

Si E est un $\mathbb{C}$ev de dimension finie alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.
On dit encore que tout endomorphisme f de E est trigonalisable dans $\mathbb{C}$

théorème 14:

1. $\text{tr}(f)$ est la somme des valeurs propres complexes de f comptées avec leurs multiplicités
2. $\det(f)$ est le produit des valeurs propres complexes de f comptées avec leurs multiplicités

démonstration

méthode 5: PRATIQUE DE LA TRIGONALISATION

L'idée générale est de placer un maximun de vecteurs propres dans la base

- **lorsque** $\dim E = 2$

  il suffit de considérer une base (e_1,e_2) *avec* e_1 *vecteur propre de* f.

- **lorsque** $\dim E = 3$

  les choses peuvent être compliquées si f *possède une vp triple*

  cas où f possède deux vp distinctes: l'une simple (λ) et l'autre double (μ)

  Notons e_1 un $\vec{vp}$ associé à λ et e_2 un $\vec{vp}$ associé à μ

  On sait que la famille (e_1,e_2) est une famille libre
  (car famille de $\vec{vp}$ associés à des vp distinctes)
  On peut donc la compléter en une base de E.
  Notons (e_1,e_2,e_3) une telle base.

  Dans cette base, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

exemple 21:

Soit $\boxed{\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{3}(-7x+2y,-2x-11y) \end{array}}$

1. Montrer que f est trigonalisable (dans $\mathbb{R}$)
2. Donner une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure
3. Donner une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

exemple 22:

Soit a un réel. On considére $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & ((a+2)x+ay,(a-2)x+ay) \end{array}$

1. Montrer que f est toujours trigonalisable
2. f est-elle toujours diagonalisable?

exemple 23:

Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\boxed{f \in \mathcal{L}(E) \text{ définie par } f(P) = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}}$
Montrer que f est trigonalisable, mais n'est pas diagonalisable.

4.2 Matrices carrées trigonalisables V067

définition 5:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est trigonalisable lorsque l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable

remarque

- une matrice triangulaire est trigonalisable
- une matrice diagonalisable est trigonalisable

théorème 15:

Il y a équivalence entre:

i A est trigonalisable

ii A est semblable à une matrice triangulaire supérieure

iii A est semblable à une matrice triangulaire inférieure

On retiendra l'équaivalence

$$A \text{ est trigonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \,|\, A = P.T.P^{-1}$$

théorème 16:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) ssi son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$

théorème 17:

Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

càd $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists\, T$ *matrice triangulaire supérieure complexe tq* $A = P.T.P^{-1}$

théorème 18:

1. $\operatorname{tr}(A)$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs multiplicités
2. $\det(A)$ est le produit des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs multiplicités

remarque 6

d'une maniére plus générale, si A est une matrice trigonalisable et si les racines de son polynôme caractéristique sont $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ comptées avec leur multiplicité, alors $\forall p \geqslant 1, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p = \operatorname{tr}(A^p)$

remarque 7

un matrice carrée A à coefficients réels n'est pas nécessairement trigonalisable sur le corps $\mathbb{R}$ (c'est à dire qu'il n'existe pas nécessairement une matrice triangulaire supérieure T à coefficients réels et une matrice inversible P à coefficients réels telles que $A = P.T.P^{-1}$). Cependant, un nombre réel étant un nombre complexe particulier, la matrice A considérée comme matrice à coefficients complexes est trigonalisable sur le corps $\mathbb{C}$ (c'est à dire qu'il existe un matrice triangulaire supérieur T à coefficients complexes et une matrice inversible P à coefficients complexes telles que $A = P.T.P^{-1}$)

méthode 6: PRATIQUE DE LA TRIGONALISATION

L'idée générale est de placer un maximum de vecteurs propres dans la matrice de passage

- **lorsque** $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

  En notant (C_1,C_2) les colonnes de la matrice de passage P,
  il suffit de considérer C_1 un vecteur propre de A, la matrice T sera triangulaire supérieure

- **lorsque** $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

  les choses peuvent être compliquées si A possède une valeur propre triple

  cas où A possède deux vp distinctes: l'une simple (λ) et l'autre double (μ)

  En notant (C_1,C_2,C_3) les colonnes de la matrice de passage P,
  il suffit de considérer C_1 un vecteur propre associé à λ et C_2 un vecteur propre associé à μ.
  La matrice T sera alors de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

exemple 24:

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

On donne $\chi_A = (X-6)^2$ et $E_6(A) = \text{vect}(C_1)$ avec $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Notons C_2 une matrice unicolonne telle que (C_1,C_2) base de $\mathbb{R}^2$.

Par exemple $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- On sait déjà que $AC_1 = 6.C_1$
- Cherchons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $AC_2 = a.C_1 + b.C_2$

  On a $AC_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui donne le système $\begin{cases} -1 = & a \\ 4 = & 2a+b \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -1 \\ b & = 6 \end{cases}$
- Comme (C_1,C_2) est libre, on sait que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible.

  et que l'on a $A = P.T.P^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

remarque 8 (*retour sur le produit matriciel vu comme opération sur les colonnes*)

Soient A et T deux matrices carrées, on a l'équivalence

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A = P.T.P^{-1} \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A.P = P.T$$

On peut alors avoir des relations intéressantes avec les colonnes de P en considérant cette seconde égalité

exemple: *dans le cas $n = 2$ avec $T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$*

Notons C_1 et C_2 les colonnes de P.

On a alors

- $P = (C_1|C_2)$
- $AP = (AC_1|AC_2)$
- $PT = (6C_1|C_1 + 6C_2)$

exemple 25:

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -9 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On donne $\chi_A = (X+1)(X-2)^2;\ E_{-1}(A) = \mathrm{vect}(C_1)$ *et* $E_2(A) = \mathrm{vect}(C_2)$ *où* $C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Notons C_3 une matrice unicolonne telle que (C_1,C_2,C_3) base de $\mathbb{R}^3$

Par exemple $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- (C_1,C_2,C_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$
- On sait déjà que $AC_1 = -C_1$ et $AC_2 = 2C_2$
- Cherchons $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $AC_3 = aC_1 + bC_2 + cC_3$

  On a
  $$AC_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  qui donne le système
  $$\begin{cases} 3 &= 2a + b + c \\ 1 &= -a + b \\ 0 &= a \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 1 \\ c &= 2 \end{cases}$$
- Comme (C_1,C_2,C_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on sait que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible

  et que l'on a $A = P.T.P^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

exemple 26:

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ se trigonalise sous la forme $T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

On donne $\chi_A = (X-6)^2$ *et* $E_6(A) = \mathrm{vect}(C_1)$ *avec* $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On nous demande ici de "montrer que A et T sont semblables".

- On sait que l'on a déjà $AC_1 = 6C_1$
- Posons $C_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

  On doit déterminer C_2 telle que $AC_2 = C_1 + 6C_2$

  Cela donne le système $\begin{pmatrix} 8x - y \\ 4x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 6.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y & = 1 \\ 4x - 2y & = 2 \end{cases} \iff y = 2x - 1$

  prenons par exemple $x = 1$ et $y = 1$, cela donne $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifions que P est inversible.

  On a bien $\det(P) = -1 \neq 0$ c'est donc bien le cas.
- Conclusion: on a $A = P.T.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

4.3 Compléments

exemple 27: $\dim E = 3$ **et** f **possède une vp simple et une double (à retenir)**

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension 3, et f un endomorphisme de E.

On suppose que f n'est pas diagonalisable, et que f posséde deux valeurs propres distinctes.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \neq \mu$ tel que $P_f(X) = (X-\lambda)(X-\mu)^2$
2. Donner la dimension de chaque sep
3. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ dans laquelle la matrice de f est du type $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \mu & b \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$
4. Justifier que $a \neq 0$ (on pourra considérer $\dim\ker(f - \mu id_E)$ et $\mathrm{rg}(f - \mu id_E)$
5. En posant $\vec{\varepsilon}_3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$,

   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$
6. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$?
7. Méme question avec $\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

exemple 28: $\dim E = 3$ **- valeur propre triple -** $\dim E_\lambda = 2$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f se trigonalise sous la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *On trouve que* $P_f(X) = (X-2)^3$ *et que* E_2 *est le plan d'équation* $x+y+z=0$.
2. *La question revient à déterminer une base* $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ *telle que* $\begin{cases} f(\vec{e}_1) & = 2\vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) & = 2\vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_3) & = 2\vec{e}_3 + \vec{e}_2 \end{cases}$
3. *En particulier,* $\vec{e}_2$ *doit appartenir à* $\mathrm{Im}(f-2id)$. *Or* $\mathrm{Im}(f-2id) = \mathrm{vect}(1,0,-1)$ *! donc le choix de* $\vec{e}_2$, *à une constante multiplicative prés est imposé. Prenons* $\vec{e}_2 = (1,0,-1)$.
4. *En cherchant* $\vec{e}_3$ *avec des coefficients inconuues, on trouve alors* $\vec{e}_3 = (x,y,-x-y+1)$. *Par exemple, on fait le choix de* $\vec{e}_3 = (0,0,1)$
5. $\vec{e}_1$ *doit étre un vecteur propre non colinéaire é* $\vec{e}_2$, *on choisit par exemple* $\vec{e}_1 = (1,-1,0)$.
6. *La famille* $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ *trouvée vérifie le systéme ci-dessus, et de plus il est aisé de constater, par exemple avec le déterminant, que c'est bien une base de* $\mathbb{R}^3$. *cqfd!*

exemple 29: $\dim E = 3$ **- valeur propre triple -** $\dim E_\lambda = 1$

Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (y,-2x+2y+z,-x+y+z)$

Montrer que f peut se trigonaliser sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans la base canonique, f *a pour matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $P_f = (X-1)^3$ *et on trouve* $E_1 = \mathrm{vect}((1,1,1))$

On pose $\vec{e}_1 = (1,1,1)$. *Avec des coefficients inconnus, on trouve alors* $\vec{e}_2 = (x,1+x,x)$. *On choisit par exemple* $\vec{e}_2 = (0,1,0)$. *Puis avec des coefficients inconnus, on détermine …*

remarque 9 (*donné à titre indicatif, à ne pas retenir*)

Dans le cas où E est de dimension 3, et f *posséde une valeur propre triple, notée* λ

Déjà f *est trigonalisable sous la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

1. *si* $\dim E_\lambda = 3$ *alors* f *est diagonalisable sous la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
2. *si* $\dim E_\lambda = 2$ *alors* f *est trigonalisable sous la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
3. *si* $\dim E_\lambda = 1$ *alors* f *est trigonalisable sous la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Cette fois le choix des vecteurs n'est pas aussi simple que dans l'exemple 27!

exemple 30:

Les matrices $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ont méme rang, méme trace, méme déterminant, méme valeur propre, méme dimension du sep et pourtant ne sont pas semblables (calculer leurs carrés!)!

5 Calcul des puissances d'une matrice par réduction

méthode 7: cas d'une matrice diagonalisable

Si $A = PDP^{-1}$ alors $\forall k \geqslant 0, A^k = PD^kP^{-1}$

Exemple:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}11&-9&3\\3&-1&3\\0&0&8\end{pmatrix}$.

- *On trouve que A est une matrice diagonalisable*
  et l'on trouve $P = \begin{pmatrix}-1&3&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&2\end{pmatrix}$
- *On a* $\forall k \geqslant 0, D^k = \begin{pmatrix}8^k&0&0\\0&8^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}$
- *En calculant PD^kP^{-1}, on aboutit alors à*

$$A^k = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}8^k - \frac{1}{2}2^k & -\frac{3}{2}8^k + \frac{3}{2}2^k & \frac{1}{2}8^k - \frac{1}{2}2^k\\ \frac{1}{2}8^k - \frac{1}{2}2^k & -\frac{1}{2}8^k + \frac{3}{2}2^k & \frac{1}{2}8^k - \frac{1}{2}2^k\\ 0 & 0 & 8^k\end{pmatrix}$$

exemple 31: cas d'une matrice triangulaire

Soit $T = \begin{pmatrix}2&3&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. On souhaite calculer T^k pour tout $k \geqslant 0$

1. On note $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

   On a $T = D + N$ et $DN = ND = \begin{pmatrix}0&6&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. De plus $N^2 = 0$ et donc $\forall k \geqslant 2, N^k = 0$

   On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton:

$$T^k = (D+N)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} D^{k-p}N^p = \sum_{p=0}^{1} \binom{k}{p} D^{k-p}N^p = D^k + kD^{k-1}N$$

2. On montre par récurrence que $\forall k \geqslant 0, T^k = D^k + kD^{k-1}N$
3. On montre par récurrence que $\forall k \geqslant 0, T^k = \begin{pmatrix}2^k&3k.2^{k-1}&0\\0&2^k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

méthode 8: cas d'une matrice seulement trigonalisable

Si $A = PTP^{-1}$ alors $\forall k \geqslant 0, A^k = PT^kP^{-1}$
Le calcul de A^k est alors moins simple que celui de la méthode 7.
Pour calculer T^k on peut penser à utiliser la formule du binôme de Newton ou montrer une formule par récurrence (cf. exemple 31)

exemple:

Calculer A^k *avec* $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

- Une trigonalisation donne $A = P.T.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Le calcul de T^k est dans l'exemple 31
- Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Un calcul long donne $P.T^k.P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^k + 3k.2^{k-1} & 3k.2^{k-1} & -3.2^{k-1} \\ 2^k - 1 & 2^k & 1 - 2^k \\ 2^k + 3k.2^{k-1} - 1 & 3k.2^{k-1} & 1 - 3k.2^{k-1} \end{pmatrix}$

exemple 32: puissances d'une matrice triangulaire nilpotente(classique)

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure) dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
On veut montrer que $T^n = 0$.
Pour cela on considère f l'endo.cano. asso. à T, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$
On note pour tout $k \in [\![1,n]\!], F_k = \text{vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k)$ et $F_0 = \{\vec{0}\}$

1. Montrer que $f(F_1) = F_0$
2. Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!], f(F_k) = \text{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_k))$
3. Montrer $\forall k \in [\![1,n]\!], f(F_k) \subset F_{k-1}$
4. En déduire $f^n(F_n)$, puis que $T^n = 0$
5. Dans le cas $n = 3$, en effectuant un calcul matriciel, retrouver que $T^3 = 0$