1 Expérience aléatoire, Univers (V126)

Une **expérience aléatoire** (= une épreuve aléatoire) se déroulant,
on la modélise à l'aide d'un ensemble Ω, que l'on appelle **univers**.
Les éléments de l'univers sont les différentes **issues** possibles de l'expérience aléatoire.

exemple 1:
On lance une pièce de monnaie.

exemple 2:
On lance un dé à six faces.

exemple 3:
On choisit un nombre entre 7 et 77.

exemple 4:
On lance deux fois de suite une mme pièce de monnaie

exemple 5:
On lance deux pièces distinctes simultanément

exemple 6:
On lance dix fois de suite une mme pièce de monnaie.
(correspond aussi aux lancers simultanés de 10 pièces de monnaie)

exemple 7:
On lance un dé à quatre faces et une pièce de monnaie

exemple 8:
On lance un dé à quatre faces, on note i le résultat obtenu.
Puis on choisit un nombre entier j compris entre 1 et i.

exemple 9:
On choisit un nombre entier naturel

exemple 10:
On choisit un multiple de 13

exemple 11:
On lance une infinité de fois une pièce de monnaie

exemple 12:
On choisit une boule dans une urne qui contient 3 boules noires et deux blanches.

exemple 13: tirage avec remise et ordre
On choisit une boule dans une urne qui contient 3 boules noires et deux blanches, on la remet, puis on tire une deuxième boule

exemple 14: tirage sans remise et ordre
On extraie une boule dans une urne qui contient 3 boules noires et deux blanches, puis on extraie une deuxième boule

exemple 15: tirages simultanés, sans ordre
On choisit deux boules simultanément dans une urne qui contient 3 boules noires et deux blanches.

exemple 16:
On extraie une boule dans une urne qui contient 2 boules noires et 2 boules blanches, puis on extraie simultanément deux boules.

2 Evénements élémentaires

2.1 Univers fini

Lorsque l'univers Ω est fini, c'est à dire $\text{card}(\Omega) = N \in \mathbb{N}^*$.
On peut noter

$$\boxed{\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\} = \{\omega_i \mid i \in [\![1,N]\!]\}}$$

- les ω_i sont les différentes **issue**s possibles
- les ensembles $\{\omega_i\}$ s'appellent **les événements élémentaires**

retour sur des exemples
- Pour l'exemple 1, les événements élémentaires sont
- Pour l'exemple 4, les événement élémentaires sont

2.2 Univers dénombrable

Lorsque l'univers Ω est dénombrable, on peut noter

$$\boxed{\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}\}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}}$$

- les ω_i sont les différentes **issue**s possibles
- les ensembles $\{\omega_i\}$ s'appellent **les événements élémentaires**

retour sur des exemples
- Pour l'exemple 9, les événements élémentaires sont
- Pour l'exemple 11, les événements élémentaires sont
  .

3 Construction pratique d'une probabilité

principe général:
à **chaque événement élémentaire**, on associe un réel (**sa probabilité=sa probabilité de réalisation**) qui doit vérifier deux conditions.

3.1 Univers fini : $\boxed{\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\} = \{\omega_i \mid i \in [\![1,N]\!]\}}$

- On pose pour tout $i \in [\![1,N]\!], p_i = P(\{\omega_i\})$ tels que $\boxed{\forall i \in [\![1,N]\!], p_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1}$

retour sur des exemples
- Pour l'exemple 1, si la pièce est équilibrée, on pose
- Pour l'exemple 1,
  si la pièce n'est pas équilibrée, on a

retour sur des exemples

- Pour l'exemple 3, si on est dans **une situation d'équiprobabilité**, on a

$$\forall i \in [\![7,77]\!], P(\{i\}) =$$

définition 1: probabilité uniforme

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ un univers fini de cardinal N.
On appelle **probabilité uniforme sur** Ω la probabilité pour laquelle tous les événements élémentaires ont la mm̂e probabilité de réalisation.
c'est à dire

$$\boxed{\forall i \in [\![1,N]\!], P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}}$$

exemple 17:
Soit Ω un univers de cardinal $N \geqslant 2$.
Soit a un réel On pose pour tout $i \in [\![1,N]\!], P(\{\omega_i\}) = a.i - a$.
Déterminer a pour que P soit une probabilité sur Ω.

3.2 Univers infini (dénombrable): $\boxed{\Omega = \{\omega_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}}$

- On pose pour tout $i \in \mathbb{N}, p_i = P(\{\omega_i\})$ tels que $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, p_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1}$

exemple 18:
Soit $\Omega = \mathbb{N}$.
On pose pour tout $i \in \Omega, P(\{i\}) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
Justifier que P est une probabilité sur Ω

4 Calcul de la probabilité d'un événement

principe général:

- Un *événement* est un sous-ensemble de Ω, c'est donc une *union d'événements élémentaires*
- Lorsqu'une probabilité est définie à partir des événements élémentaires, on peut calculer la probabilité de n'importe que événement par simple sommation.

exemple 19: on reprend l'exemple 3

Déterminer la probabilité de choisir un multiple de 10.

- *On note A l'événement "le nombre choisi est un multiple de 10"*
- *On a ainsi* $A = \{10,20,30,40,50,60,70\}$
- *d'où*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{10,20,30,40,50,60,70\}) \\ &= P(\{10\}) + P(\{20\}) + P(\{30\}) + P(\{40\}) + P(\{50\}) + P(\{60\}) + P(\{70\}) \\ &= \frac{1}{71} + \frac{1}{71} + \cdots + \frac{1}{71} \\ &= \frac{7}{71} \end{aligned}$$

- Etant dans une *situation d'équiprobabilité*, on aurait également directement pu écrire

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{7}{71}$$

exemple 20: on reprend l'exemple 18

Déterminer la probabilité de choisir un multiple de 10.

- *On note A l'événement "le nombre choisi est un multiple de 10"*
- *On a ainsi* $A = \{10.i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- *d'où*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{10.i \mid i \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(\{10.i\}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{10.i+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^i \\ &= \frac{1}{2} . \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{10}}} \\ &= \frac{1024}{2046} \end{aligned}$$