

ESPACES PROBABILISES

Table des matières

1	Probabilité (V128)	1
2	Probabilité conditionnelle (V130)	6
3	Système complet d'événements, formule des probabilités totales (V131)	8
4	Evénements indépendants (V129)	13
5	Continuité croissante et décroissante (V132)	16

1 Probabilité (V128)



définition 1: rappel de la définition de sup dans le cas Ω fini

Soit Ω un ensemble fini.

On appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ telle que:

- i) $P(\Omega) = 1$
- ii) Pour tout couple d'événements disjoints A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité finie)

Il est facile de vérifier que cette définition est compatible avec la définition 2 plus générale lorsque l'on prend $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu



définition 2: axiomes des probabilités

Soit Ω un univers et \mathcal{T} une tribu.

On appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) une application $P : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ telle que

- i) $P(\Omega) = 1$
- ii) Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles on a

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

(La définition implique implicitement que la série est convergente.)

Le triplet (Ω, \mathcal{T}, P) s'appelle un espace probabilisé

Un espace probabilisé est donc la donnée d'un univers, de l'ensemble des événements(=le tribu) et d'une probabilité pour chacun de ces événements

On rappelle que deux à deux incompatibles signifie deux à deux disjoints

c'est à dire que $\forall n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$

♠ **exemple 1:**

Un compteur affiche un nombre entier naturel aléatoire n avec la probabilité $\frac{1}{2^{n+1}}$

On modélise cette expérience aléatoire avec un espace probabilisé $(\mathbb{N}, \mathcal{T}, P)$

pour lequel on a $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$

1. Déterminer la probabilité "d'obtenir" un nombre pair

Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $A = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$

Notons pour tout $n \geq 0, A_n = \{2n\}$.

Les événements $(A_n)_{n \geq 0}$ sont deux à deux incompatibles et l'on a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

On a ainsi:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{2n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

2. Déterminer la probabilité "d'obtenir" un nombre impair

Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $B = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$

Notons pour tout $n \geq 0, B_n = \{2n + 1\}$.

Les événements $(B_n)_{n \geq 0}$ sont deux à deux incompatibles et l'on a $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

On a ainsi:

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{2n + 1\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(2n+1)+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

3. Déterminons la probabilité "d'obtenir" un nombre supérieur ou égal à 8.

Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $C = \{i | i \geq 8\} = \{8 + n | n \in \mathbb{N}\}$

Notons pour tout $n \geq 0, C_n = \{8 + n\}$.

Les événements $(C_n)_{n \geq 0}$ sont deux à deux incompatibles et l'on a $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$

On a ainsi:

$$P(C) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(C_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{8+n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{9+n}} = \frac{1}{2^9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

4. En admettant que $P(\emptyset) = 0$, déterminons la probabilité d'obtenir 0 ou 1

Notons $D_0 = \{0\}, D_1 = \{1\}$ et $\forall n \geq 2, D_n = \emptyset$

Les événements $(D_n)_{n \geq 0}$ sont bien deux à deux incompatibles et l'on a $\{0,1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$

$$D'où $P(\{0,1\}) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D_n) = P(D_0) + P(D_1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(D_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = \frac{3}{4}$$$

Les propriétés suivantes, valables sur un espace probabilisé fini, sont aussi valables sur un esp. proba. dénombrable!

♥ théorème 1:

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé dénombrable ou fini :

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Pour tout couple d'évènements disjoints A et B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (additivité finie)
3. Pour tout couple d'évènements A et B , $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
4. Si A est un évènement alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. Si A et B sont deux évènements, tels que $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ (monotonie)
6. Si A et B sont deux évènements, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
7. Si N est un entier et si A_1, A_2, \dots, A_N sont des évènements 2 à 2 disjoints alors

$$P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N P(A_k)$$

lorsque l'on calcule la probabilité d'une union on se demande toujours si cette union est disjointe 2 à 2 !

démonstration

1. Notons pour tout $n \geq 0$, $A_n = \emptyset$.

Les évènements $(A_n)_{n \geq 0}$ sont deux à deux incompatibles,

on peut donc affirmer grâce à définition 2 que $\sum P(A_n)$ est une série convergente.

Cette série a un terme général qui est constant ($= P(\emptyset)$), et l'on sait qu'une telle série converge ssi son terme général est égal à zéro (pour la démo de ce résultat, il suffit de revenir aux sommes partielles!), d'où $P(\emptyset) = 0$

2. Soit N un entier et A_1, A_2, \dots, A_N des évènements 2 à 2 disjoints

Considérons la suite d'évènements $(B_n)_{n \geq 0}$ définis par
$$\begin{cases} B_n = A_n & \text{si } 1 \leq n \leq N \\ B_n = \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est aisé de se convaincre que la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'évènements deux à deux incompatibles. *en effet:*

soient n et m deux entiers distincts

- si $1 \leq n \neq m \leq N$, on a $B_n \cap B_m = A_n \cap A_m = \emptyset$
- sinon on a $B_n = \emptyset$ ou $B_m = \emptyset$ et donc $B_n \cap B_m = \emptyset$

On peut donc affirmer que $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$

Or

$$\text{i) } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n=1}^{n=N} A_n$$

$$\text{ii) } \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = P(B_0) + \sum_{n=1}^N P(B_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(B_n) = 0 + \sum_{n=1}^N P(A_n) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 0 = \sum_{n=1}^N P(A_n)$$

On a bien prouvé que
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{n=N} A_n\right) = \sum_{n=1}^N P(A_n)$$

3. A et \bar{A} étant deux évènements disjoints, on sait d'après 2) que $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A})$
or $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $P(\Omega) = 1$
d'où $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4. Soient A et B tels que $A \subset B$

Considérons $C = \{\omega \in B \mid \omega \notin A\} = B - A = B \cap \bar{A}$

Comme A et C sont incompatibles et que $A \cup C = B$, on a $P(A) + P(C) = P(B)$,

et comme $P(C) \geq 0$ on a prouvé que $P(A) \leq P(B)$

5. Soient A et B deux événements.

Notons $C = A \cap B$ ainsi que $A_1 = A \cap \bar{B}$ et $B_1 = B \cap \bar{A}$

i) on a $A = A_1 \cup C$ et $A_1 \cap C = \emptyset$ donc $P(A) = P(A_1) + P(C)$ [et de même $P(B) = P(B_1) + P(C)$]

ii) comme $A \cup B = A_1 \cup B_1 \cup C$ et que A_1, B_1 et C sont incompatibles deux à deux, on sait que

$$P(A \cup B) = P(A_1) + P(B_1) + P(C) = P(A) - P(C) + P(B) - P(C) + P(C)$$

On obtient bien $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

♠ exemple 2: formule du crible de Poincaré(HP)

Soient A_1, A_2, \dots, A_N des événements (on ne les suppose pas 2 à 2 disjoints)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Par exemple pour $N = 3$ cela donne

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

à savoir redémontrer en posant $B = A_2 \cup A_3$ et en utilisant le 6 du théorème 1

♥ théorème 2: sous-additivité (probabilité d'une union a priori non disjointe)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé.

1. cas fini : pour tout entier N , on a $P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) \leq \sum_{n=0}^N P(A_n)$

2. cas infini : Si la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge alors on a $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$

"La probabilité de l'union est majorée par la somme des probabilités"

remarque 1 (Très importante)

Pour calculer la probabilité d'une union on se demande si cette union est disjointe deux à deux.

- Si c'est le cas: la probabilité de l'union est égale à la somme des probabilités
- Si ce n'est pas le cas: on peut juste dire que la probabilité de l'union est majorée par la somme des probabilités



définition 3: événement négligeable

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé,

Un évènement A est dit négligeable ou presque impossible si $P(A) = 0$

Un évènement A est dit presque sûr ou presque certain si $P(A) = 1$

\emptyset est un évènement négligeable, ce n'est peut-être pas le seul.

Ω est un évènement presque certain, ce n'est peut-être pas le seul.

Pour comprendre ces notions, il est plus aisé de faire appel à vos connaissances de Terminale sur les lois normales: vous saviez que si une variable aléatoire réelle X suivait la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, alors la probabilité que la valeur de X soit dans l'intervalle $[a, b]$ était égal à $P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt$, et donc en particulier la probabilité que X soit égale à une valeur fixée x_0 était égale à

$$P(X = x_0) = P(x_0 \leq X \leq x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{x_0} e^{-t^2/2} dt = 0$$

Oui, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, l'évènement $(X = x_0)$ est de probabilité nulle!

Les évènements $(X = 1)$, $(X = \pi)$, $(X = 2020)$, ... sont tous des évènements négligeables

Qu'en est-il des évènements $(X \in \mathbb{N})$ ou $(X \in \mathbb{Z})$ ou $(X \in \mathbb{Q})$?



exemple 3: probabilité uniforme

- cas où Ω est fini: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

On appelle probabilité uniforme sur Ω la probabilité P pour laquelle tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

Comme la somme des probabilités élémentaires doit valoir un, on a donc

$$\text{pour tout } i \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$$

- cas où Ω est dénombrable: $\Omega = \{\omega_i / i \in \mathbb{N}\}$.

Il n'existe pas de probabilité uniforme sur Ω !

En effet, **supposons qu'une telle probabilité existe** et notons c la probabilité commune à tous les évènements élémentaires.

On sait que la série $\sum P(\{\omega_i\})$ doit être une série convergente (de somme égale à un).

- Notons S_n la somme partielle d'indice n de la série précédente.

$$\text{On a } \forall n \geq 0, S_n = \sum_{i=0}^n P(\{\omega_i\}) = (n+1) \cdot c$$

Or si $c \neq 0$, il est clair que la suite (S_n) est divergente, ce qui signifie que la série $\sum P(\{\omega_i\})$ diverge.

Nous venons de prouver que $c = 0$

- Mais alors on a $P(\Omega) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0 \neq 1$

contradiction!

2 Probabilité conditionnelle (V130)



définition 4: probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements de (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé, tel que $P(B) > 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B , et on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, le réel

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

rem: on rappelle que $A|B$ ne désigne pas un évènement!



théorème 3:

Soit B un évènement de (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé, tel que $P(B) > 0$.

Alors l'application $P_B : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est une probabilité sur (Ω, \mathcal{T}) ,

$$A \mapsto P_B(A)$$

on l'appelle la probabilité conditionnée à B

démonstration: on montre que P_B vérifie les axiomes d'une probabilité

i) P_B est clairement à valeurs positives

ii) $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ car $\Omega \cap B = B$

iii) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles.

Notons pour tout n , $C_n = B \cap A_n$.

La suite d'évènements $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore une suite d'évènements deux à deux incompatibles.

En effet: soit $n \neq m$

$$\text{On a } C_n \cap C_m = (A_n \cap B) \cap (A_m \cap B) = (A_n \cap A_m) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

Comme P est une probabilité on peut écrire

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(C_n)$$

$$\text{Or } B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

$$\text{donc } P\left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)$$

Ainsi

$$P\left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B)$$

En divisant chaque membre de cette égalité par $P(B) > 0$ cela donne

$$\frac{P\left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{c'est à dire } P_B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n)$$

♥ théorème 4: formule de Bayes ou des causes

Soient A et B deux évènements de (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé, tel que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$
On a

$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B)$$

rem: cela provient simplement de l'égalité évidente

$$P(B)P_B(A) = P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

♥ théorème 5: Formule des probabilités composées

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé,
et $(A_k)_{k \in [1, n]}$ une suite finie d'évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}}(A_{n-1}) \cdot P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

En particulier pour $n = 3$ cela donne $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$

rem: cette formule permet de calculer une intersection d'un nombre fini d'évènements

démo dans le cas $n = 3$ et $n = 4$

♠ exemple 4:

Dans une urne se trouvent 3 boules vertes et 3 boules rouges.

On extrait successivement, sans remise, 3 boules en suivant la règle suivante: si la boule extraite est verte, on ajoute deux boules rouges, sinon on ajoute deux boules vertes.

Déterminer la probabilité de tirer successivement 3 boules vertes.

Solution

3 Système complet d'événements, formule des probabilités totales (V131)



définition 5: système complet d'événements (SCE)

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé.

1. Une suite finie $(A_n)_{n \in [1, N]}$ d'événements est un système complet d'événements lorsque:

- i) les évènements sont 2 à 2 disjoints: $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ii) l'union est l'univers tout entier: $\bigcup_{n \in [1, N]} A_n = \Omega$

2. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements est un système complet dénombrable d'évènements lorsque:

- i) les évènements sont 2 à 2 disjoints: $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ii) l'union est l'univers tout entier: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$

rem: Une famille d'événements est un SCE ssi chaque élément de Ω appartient à un et un seul des évènements de la famille.

càd, ssi un et un seul des évènements de la famille se réalise lorsque l'expérience aléatoire se déroule

rem: si A est un évènement alors (A, \bar{A}) est un SCE

illustration d'un SCE comme partition de Ω



exemple 5: savoir reconnaître un SCE

Expérience aléatoire: on lance une pièce de monnaie une infinité de fois.

Indiquer si les familles suivantes sont des SCE

1. $\mathcal{F} = (A, B)$ avec $A =$ "le premier lancer a donné pile" , $B =$ "le premier lancer a donné face"
2. $\mathcal{F} = (A, B)$ avec $A =$ "le premier lancer a donné pile" , $B =$ "le second lancer a donné face"
3. $\mathcal{F} = (A, B, C)$ avec $A =$ "le premier lancer a donné pile" , $B =$ "le second lancer a donné face" et $C =$ "le second lancer a donné pile"
4. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in [0, 4]}$ avec $A_n =$ "on a obtenu exactement n Piles avec les quatre premiers lancers"
5. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face au n -ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0 =$ "aucun lancer n'a donné Face"
6. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face pour la première fois au n -ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$
7. $\mathcal{F} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $A_n =$ "on a obtenu Face pour la première fois au n -ième lancer " où $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0 =$ "aucun lancer n'a donné Face"

♥ théorème 6: formule des probabilités totales avec un système complet fini

Soit $(A_n)_{n \in [1, N]}$ un système complet d'événements.

Alors pour tout événement B on a

$$P(B) = \sum_{n=1}^N P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^N P(A_n)P(B|A_n)$$

remarque: très souvent on utilise cette formule avec $N = 2$ et $A_2 = \overline{A_1}$:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap \overline{A_1}) = P(A_1).P(B|A_1) + P(\overline{A_1}).P(B|\overline{A_1})$$

démo

♠ exemple 6: trop classique

Dans une fabrique, un étude statistique a montré que le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées est égal à 2%. Pour éliminer les pièces défectueuses, un test de qualité est mis en place dont les résultats sont les suivants:

- le test élimine 99% des pièces défectueuses
- le test élimine 0,5% des pièces non défectueuses.

Questions:

1. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit éliminée à tort.
2. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant qu'elle n'a pas été éliminée par le test.

Réponses:

- On note D l'événement "la pièce est défectueuse", et T l'événement "le test élimine la pièce".
- L'énoncé donne $P(D) = 0.02$ $P(T|D) = P_D(T) = 0.99$ et $P(T|\overline{D}) = P_{\overline{D}}(T) = 0.005$

1. La première question revient à calculer $P(T \cap \overline{D})$

On a $P(T \cap \overline{D}) = P(\overline{D}).P(T|\overline{D})$ avec $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.02 = 0.98$.

Ainsi $P(T \cap \overline{D}) = 0.98 \times 0.005 = 0.0049$

2. La deuxième question revient à calculer $P(D|\overline{T}) = P_{\overline{T}}(D)$

On a $P_{\overline{T}}(D) = \frac{P(D)}{P(\overline{T})} P_D(\overline{T})$. Il nous manque $P(\overline{T})$ et $P_D(\overline{T})$.

Comme (D, \overline{D}) est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P_D(T).P(D) + P_{\overline{D}}(T).P(\overline{D}) = 0.99 \times 0.02 + 0.005 \times 0.98 = 0.0247$$

Donc $P(\overline{T}) = 0.9753$

On a $P_D(\overline{T}) = 1 - P_D(T) = 1 - 0.99 = 0.01$ et $P_{\overline{T}}(D) = \frac{0.02}{0.9753} \times 0.01 = 0.0002$ à 10^{-4} près, soit à peu près 0.02%

♠ exemple 7:

Dans tout cet exemple, on notera:

- B l'événement la boule tirée est blanche
- A_n l'événement on tire la boule dans l'urne numérotée n

1. Soit $N \geq 1$ un entier fixé.

On dispose de N urnes numérotées de 1 à N .

L'urne numérotée n renferme n boule(s) blanche(s) et $N - n$ boule(s) noire(s).

On choisit au hasard de manière équiprobable une des urnes et l'on extrait une boule.

Cette boule est blanche! Quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans l'urne numéro n ?

- Pour tout n on a $P(A_n) = \frac{1}{N}$ et $P(B|A_n) = P_{A_n}(B) = \frac{n}{N}$
- (A_1, A_2, \dots, A_N) est un système complet d'événements (fini) donc d'après la formule des probabilités totales on a

$$P(B) = \sum_{n=1}^N P(A_n) \cdot P_{A_n}(B) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \cdot \frac{n}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N n = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N}$$

- On cherche pour n fixé $P_B(A_n)$. D'après la formule de Bayes on a

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n)}{P(B)} \cdot P_{A_n}(B) = \frac{\frac{1}{N}}{\frac{N+1}{2N}} \cdot \frac{n}{N} = \frac{2n}{N(N+1)}$$

illustration des urnes

♥ théorème 7: formule des probabilités totales avec un système complet dénombrable

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé.

Alors pour tout événement B ,

la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et
$$P(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) P_{A_n}(B)$$

avec la convention: $P(A_n) P_{A_n}(B) = 0$ si $P(A_n) = 0$

rem: cette convention est justifiée par le fait que $B \cap A_n \subset A_n$ et donc que $P(B \cap A_n) \leq P(A_n) = 0$

démo

♠ exemple 8:

Dans tout cet exemple, on notera:

- B l'événement la boule tirée est blanche
 - A_n l'événement on tire la boule dans l'urne numérotée n
2. On dispose d'une infinité d'urnes numérotées par \mathbb{N}^* .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'urne numérotée n renferme n boule(s) blanche(s) et 2 boules noires.

L'expérience consiste à choisir une urne au hasard (*on suppose que $P(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$*), et à en extraire une boule. On se pose les mêmes questions que précédemment

- Pour tout n on a $P_{A_n}(B) =$
- Comme $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements (dénombrable) on a d'après la formule des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \cdot P_{A_n}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Un calcul classique prouve que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$ et donc $P(B) = \frac{1}{2}$

- Pour n fixé on a cette fois $P_B(A_n) = \frac{P(A_n)}{P(B)} \cdot P_{A_n}(B) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

illustration et procédé télescopique

♥ théorème 8: formule de Bayes-deuxième version (à savoir retrouver)

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé

et soit B un événement tel que $P(B) > 0$, alors

1. Si $(A_n)_{n \in [1, N]}$ un système complet d'événements, on a

pour tout $n \in [1, N]$ tel que $P(A_n) > 0$, on a

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{\sum_{k=1}^N P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet dénombrable d'événements, on a

pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(A_n) > 0$, on a

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P_{A_n}(B)}{\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

♠ exemple 9: des probabilités en cascade

Une urne contient $2n$ boules : n noires et n blanches . On tire successivement et sans remise n boules de l'urne. On note B_i l'évènement "la i -ième boule tirée est blanche"

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?
2. On suppose que n est pair (on note $n = 2k$) . Quelle est la probabilité de tirer en alternance une boule blanche, puis une une noire , en commençant par une blanche ?
3. Quelle est la probabilité de ne tirer qu'une boule blanche ?

Réponse

1. On utilise la formule des probabilités composées:

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_1 \cap B_2) \dots P(B_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}) \text{ avec}$$

- $P(B_1) = \frac{n}{2n}$ (il y a n boules blanches et $2n$ boules au total)

- $P(B_2|B_1) =$ (il y a

- $P(B_3|B_1 \cap B_2) =$ (il y a

- $P(B_k|B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) =$ (il y a

$$\text{d'où } P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \left(\frac{n}{2n}\right) \left(\frac{n-1}{2n-1}\right) \left(\frac{n-2}{2n-2}\right) \dots \left(\frac{1}{n+1}\right) =$$

2. On note N_k l'évènement "la k -ième boule tirée est noire" .

On utilise encore la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n) = \left(\frac{2k}{4k}\right) \left(\frac{2k}{4k-1}\right) \left(\frac{2k-1}{4k-2}\right) \dots \left(\frac{k+1}{2k+2}\right) \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)$$

Ce qui se simplifie en
$$P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n) = \frac{(2k)!(2k)!}{k!(4k)!}$$

3. Notons A l'évènement "ne tirer qu'une boule blanche"

A est la réunion disjointe des événements:

$$(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) \quad , \quad (N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n) \quad , \dots , \quad (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n)$$

On a toujours avec la même formule des probabilités composées:

- $P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-2} \dots \frac{2}{n+1} = \frac{n \cdot n!^2}{(2n)!}$

- $P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n-1}{2n-2} \dots \frac{2}{n+1} = \frac{n \cdot n!^2}{(2n)!}$

- $P(N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap N_4 \cap \dots \cap N_n) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n-2} \cdot \frac{n-2}{2n-3} \dots \frac{2}{n+1} = \frac{n \cdot n!^2}{(2n)!}$

Comme A est la réunion disjointe des événements ci-dessus on sait que $P(A)$ est égal à la somme de leurs probabilités, d'où:

$$P(A) = P(B_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) + P(N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_n) + \dots + P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n)$$

Comme toutes ces probabilités sont égales cela donne
$$P(A) = n^2 \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

application numérique: pour $n = 4$ on a $P(A) \simeq 23\%$ et pour $n = 10$ on a $P(A) \simeq 0,05\%$

4 Événements indépendants (V129)



définition 6: indépendance cas fini

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé

On dit que:

- i) les événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
(c'est à dire $P_B(A) = P(A)$ quand $P(B) > 0$)
- ii) les événements $(A_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont 2 à 2 indépendants lorsque

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \text{ tels que } i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

- iii) les événements $(A_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont mutuellement indépendants lorsque

$$\text{pour tout sous ensemble } I \subset \{1, \dots, N\}, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

rem 1: Attention à ne pas confondre indépendant et incompatible!

rem 2: il est clair que la mutuelle indépendance implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.

Question malicieuse : pour montrer la mutuelle indépendance de N événements, combien de vérifications doit-on effectuer?

remarque 2 (ne pas confondre indépendants et incompatibles)

- Des événements peuvent être indépendants pour une probabilité P mais ne plus l'être pour une probabilité P_1 !
- En revanche, la notion d'incompatibilité ne dépend pas de la probabilité P choisie sur l'espace.
- Il n'y a pas d'implication entre "indépendant" et "incompatible".



exemple 10: l'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse.

On lance 2 dés parfaits. A_1 est l'évènement "le premier dé amène un nombre pair", A_2 est l'évènement "le deuxième dé amène un nombre pair", A_3 est l'évènement "la somme des dés est paire".

Montrer que (A_1, A_2, A_3) sont des événements 2 à 2 indép.s mais qu'ils ne sont pas mutuellement indép.

solution

♥ théorème 9:

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé

- i) Si A et B sont deux événements indépendants
alors A et \overline{B} sont indépendants, ainsi que \overline{A} et B , ainsi que \overline{A} et \overline{B}
- ii) Si $(A_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont mutuellement indépendants et si $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ on a $B_i = \overline{A_i}$ ou $B_i = A_i$,
alors $(B_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sont mutuellement indépendants

Par exemple si on sait que (A_1, A_2, A_3, A_4) sont des événements mutuellement indépendants, on peut affirmer que:

- $(A_1, A_2, \overline{A_3}, A_4)$ sont mutuellement indépendants
- $(A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}, A_4)$ sont mutuellement indépendants
- $(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, A_4)$ sont mutuellement indépendants
- ...

démonstration du i)

On suppose que A et B sont indépendants, c'est à dire que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- On a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et cette union est disjointe.

$$\text{d'où } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

et donc

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

définition 7: indépendance cas dénombrable

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé..

On dit que:

- les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2 à 2 indépendants lorsque
 $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$
- les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants lorsque

$$\text{pour tout sous ensemble fini } I \subset \mathbb{N}, P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

càd pour tout sous ensemble fini $I \subset \mathbb{N}$, $(A_n)_{n \in I}$ sont mutuellement indépendants

rem: on pourra noter le parallèle avec la définition de "famille libre de vecteurs" lorsque la famille est composée d'une infinité de vecteurs

remarque 3 (importante)

Quand on considère la probabilité d'une intersection d'un nombre fini d'événements, on se demande s'il s'agit d'événements mutuellement indépendants

5 Continuité croissante et décroissante (V132)

♥ théorème 10:

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ et $D_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$

1. la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion
2. la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$
4. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$

ce qui s'écrit encore $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k=0}^n A_k \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

démo

♥ théorème 11: continuité croissante

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'évènements pour l'inclusion (c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$).

$$\text{Alors } \boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)}$$

remarques:

- le théorème affirme implicitement l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$
- $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n\right)$ n'a aucun sens car $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ n'a aucun sens!

♥ théorème 12: continuité décroissante

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé .

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'évènements pour l'inclusion (c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$).

$$\text{Alors } \boxed{P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)}$$

démonstration du théorème 12 à partir du théorème 11

- Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante d'évènements pour l'inclusion

Notons pour tout entier $n, B_n = \overline{A_n}$.

La suite (B_n) est alors une suite croissante d'évènements!

D'après le théorème 11, on peut donc affirmer que $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$

Or:

$$\text{i) } P(B_n) = 1 - P(A_n)$$

$$\text{ii) } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \quad \text{et donc } P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

$$\text{Ainsi } P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - P(A_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

♠ exemple 11: exemple important

On considère l'expérience qui consiste à lancer une infinité de fois une pièce de monnaie.

On suppose les tirages indépendants et la pièce parfaitement équilibrée.

On souhaite prouver qu'il est presque impossible de n'obtenir que des Faces.

Notons:

- pour tout $k \geq 1, F_k$ l'évènement "Face est sorti au k-ème tirage".
- A l'évènement "Face est sorti à tous les tirages".

$$\text{On a bien sûr } \boxed{A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n}$$

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite décroissante pour l'inclusion.

Nous allons utiliser astucieusement le théorème 10 pour introduire une suite décroissante pour l'inclusion.

Notons pour tout entier n , $D_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$

On sait que la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante pour l'inclusion et que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$

Il est clair que pour tout entier n on a par indépendance des tirages, les événements $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants

$$P(D_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n F_k\right) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot \dots \cdot P(F_n) = \frac{1}{2^n}$$

D'après le théorème de continuité décroissante,

on peut affirmer que $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Conclusion: $P(A) = 0$

démonstration du théorème 11:

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante d'événements.

i) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ on a $\forall n \geq 0, P(A_n) \leq P(A_{n+1})$

La suite $(P(A_n))_{n \geq 0}$ est donc une suite croissante et majorée (par un), elle est donc convergente! Conclusion: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$ existe

ii) On souhaite définir une suite d'événements 2 à 2 disjoints $(B_n)_{n \geq 0}$ telle que $\forall n \geq 0, A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$

On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n - A_{n-1} = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$.

- Soit $j > i$
on a $B_i \subset A_i \subset A_{j-1}$, et $B_j \subset \overline{A_{j-1}}$ donc $B_i \cap B_j = \emptyset$
ceci montre que les événements de la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ sont 2 à 2 disjoints.

- Par récurrence sur n , on montre que $A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$

i) $A_0 = B_0$ par définition

ii) on suppose que $A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$ pour un $n \geq 0$ fixé quelconque

Comme $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}$ on a donc $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1} = \left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) \cup B_{n+1}$

c'est à dire $A_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n+1} B_k$

iii) Comme les B_k sont disjoints 2 à 2 on a $P(A_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) = \sum_{k=0}^n P(B_k)$ pour tout $n \geq 0$

iv) On a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right)$ et l'on a vu que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

On a ainsi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$

v) Or d'après la définition d'une probabilité on peut écrire, car $(B_n)_{n \geq 0}$ suite d'événements 2 à 2 incompatibles

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \quad \text{cqfd!}$$