VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES SOUS-ESPACES PROPRES

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes, E désignera un $\mathbb{K}$- espace vectoriel (le plus souvent, de dimension finie n) et f un endomorphisme de E

- On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de $E \to E$
- On rappelle aussi que

définition 1: sev stable par un endomorphisme

Soit F un sev de E.
On dit que <u>F est un sev stable par f</u> lorsque $f(F) \subset F$, c'est à dire lorsque $\forall \vec{x} \in F, f(\vec{x}) \in F$
remarque: $\{\vec{0}\}$ et E sont toujours des sev stables (trivial)

1 Polynômes caractéristiques

1.1 polynôme caractéristique d'une matrice (V037)

définition 2:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle polynôme caractéristique de la matrice A le déterminant de la matrice $A - X.I_n$.
On le note χ_A. On a donc

$$\boxed{\chi_A(X) = \det(X.I_n - A)}$$

Le polynôme $\chi_A(X)$ est un polynôme unitaire de degré n

rem (HP): $\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A).X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$

exemple 1: Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\pi \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

théorème 1:

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique
2. A et ${}^tA = A^T$ ont le même polynôme caractéristique.

Deux matrices peuvent avoir même polynôme caractéristique sans toutefois être semblables.

démonstration

1.2 polynôme caractéristique d'un endomorphisme (V040)

définition 3:

Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension fini n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle *polynôme caractéristique de l'endomorphisme* f, et on note χ_f le déterminant de l'endomorphisme $Xid_E - f$.

On a donc

$$\boxed{\chi_f(X) = \det(Xid_E - f)}$$

Le polynôme $\chi_f(X)$ est un polynôme unitaire de degré n où $n = \dim E$
rem (HP): $\chi_f(X) = X^n - \operatorname{tr}(f).X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
On a

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(X.id_E - f) = X.\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E) - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = X.I_n - A$$

et ainsi

$$\chi_f(X) = \det(X.id_E - f) = \det(X.I_n - A) = \chi_A(X)$$

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est égal au polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice qui lui est associée!

exemple 2:

Déterminer le polynôme caractéristique des endomorphismes suivants:

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & X.P' + P'' \end{array}$$

exemple 3: homothétie

Déterminer le polynôme caractéristique de l'homothétie de rapport k.

2 Elements propres d'un endomorphisme (dimension quelconque)

E désigne un $\mathbb{K}-$ ev de dimension quelconque, et f un endomorphisme de E

2.1 Définitions et méthode (V060)

définition 4:

Soit E un $\mathbb{K}-$ ev et f un endomorphisme de E.

- On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre (v.p) de f lorsque il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ non nul tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
- Dans ce cas, le vecteur $\vec{x}$ s'appelle un vecteur propre ($\vec{v}.p$) associé à la valeur propre λ
- L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f, et se note $sp(f)$

exemple 4:

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,2x) \end{array}$

1. Vérifier que (1,1) est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée?
2. Mêmes questions avec (1,2)
3. Déterminer tousles vecteurs propres associés à la valeur propre -1
4. Même question avec la valeur propre 2

exemple 5: dans un espace de polynômes

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1).P' \end{array}$

1. Vérifier que $X-1$ et $(X-1)^2$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les vp associées?
2. Déterminer d'autres valeurs propres!

méthode 1: comment déterminer les éléments propres en dim quelconque

On détermine les solutions non triviales de l'équation $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ (càd avec $\vec{x} \neq \vec{0}$)

exemple 6: dans un espace de matrices

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T + 2A \end{array}$

1. Les matrices symétriques sont-elles vecteurs propres de φ? Si oui, associées à quelle valeur propre?
2. Montrer que si λ est une valeur propre de φ alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$
3. 3 est-il valeur propre? 1 est-il valeur propre?

définition 5: sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$ev et f un endomorphisme de E.
Soit $\lambda \in sp(f)$.
Le noyau de l'endomorphisme $f - \lambda.id_E$ est appelé sous-espace propre(sep) de f associé à la valeur propre λ.
On le note E_λ ou $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda.id_E) = \{\vec{x} \in E \,|\, (f - \lambda.id_E)(\vec{x}) = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in E \,|\, f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x}\}$

rem: $E_\lambda(f)$ correspond à l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la vp λ union le singleton vecteur nul.
rem: on rappelle que si g est une application linéaire alors $g(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\ker(g)$ est un sev

exemple 7:

- Dans l'exemple 4, on a trouvé $E_1(f) = \{(x,-2x)|x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1,-2))$ et $E_2(f) = \{(x,x)|x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1,1))$
- Dans l'exemple 6, on a trouvé $E_3(\varphi) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $E_1(\varphi) = \mathcal{A} - 3(\mathbb{R})$

remarque 1

- *on appelle <u>éléments propres</u> de l'endomorphisme f les valeurs propres et les vecteurs propres de f*
- *<u>L'ensemble des vecteurs propres associées à une même valeur propre λ n'est pas un sev</u> car cet ensemble ne possède pas le vecteur nul!*

proposition 1

On a l'équivalence : $\boxed{\lambda \text{ est un valeur propre de } f \iff \text{l'endomorphisme } f - \lambda id_E \text{ n'est pas injectif}}$
En particulier:

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{ si et seulement si } f \text{ n'est pas injectif}}$$

démonstration: *en effet, on a les équivalences:*

λ *est vp de* $f \Leftrightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}, f(\vec{x}) = \lambda.\vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}, (f - \lambda id_E)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \ker(f - \lambda id_E)$ *n'est pas réduit au vecteur nul*

remarque 2 (*importante*)

on retiendra que si E est de dimension finie, on a : $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f \text{ ssi } f \text{ n'est pas bijectif.}}$

théorème 2:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E < \infty$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

i) λ est une valeur propre de f
ii) λ est une racine du polynôme caractéristique χ_f
iii) l'endomorphisme $f - \lambda id_E$ n'est pas bijectif

Lorsque $\dim E$ *est finie, les valeurs propres de f sont <u>les</u> racines de son polynôme caractéristique*

démonstration: *On a les équivalences*

$$\lambda \text{ vp de } f \iff f-\lambda.id_E \text{ n'est pas injectif} \iff f-\lambda.id_E \text{ n'est pas injectif} \iff \det(f-\lambda.id_E)=0$$

or $\det(f-\lambda.id_E)=\det(-(\lambda.id_E-f))=(-1)^n.\det(\lambda.id_E-f)=(-1)^n.\chi_f(\lambda)$
on a bien montré l'équivalence

$$\lambda \text{ vp de } f \iff \chi_f(\lambda)=0$$

méthode 2: déterminer les éléments propres en dimension finie.

On détermine le polynôme caractéristique puis ses racines.
Pour chaque vp trouvée on détermine le sep correspondant en résolvant l'équation $f(\vec{x})=\lambda.\vec{x}$ ou $(f-\lambda.id_E)(\vec{x})=\vec{0}$

Exemple:

Déterminer les éléments propres de $\boxed{\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,3x-y) \end{array}}$.

2.2 exemples (V061)

exemple 8: éléments propres d'une rotation vectorielle du plan

Soit f la rotation vectorielle d'angle α.
Déterminer les éléments propres de f.
Trois cas sont à envisager:

1. .

2. .

3. .

exemple 9:

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de l'application $\boxed{\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \end{array}}$

dans le cas où $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *puis dans le cas où* $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Solution:

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

On s'intéresse aux solutions non triviales de l'équation $f(M) = \lambda.M$.

On a les équivalences suivantes

$$f(M) = \lambda M \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = \lambda a \\ c & = \lambda b \\ d & = \lambda c \\ b & = \lambda d \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)a & = 0 \\ c & = \lambda b \\ d & = \lambda^2 b \\ b & = \lambda^3 b \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)a & = 0 \\ (1-\lambda^3)b & = 0 \\ c & = \lambda b \\ d & = \lambda^2 b \end{cases} \quad (S)$$

Puis on effectue une discussion sur les solutions de $1 - \lambda = 0$ et $1 - \lambda^3 = 0$, ce qui nécessité une discussion $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$!

- $\boxed{\textbf{cas où } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$
  - si $\lambda \neq 1$, on a $1 - \lambda \neq 0$ et $1 - \lambda^3 \neq 0$ et donc $(S) \Longleftrightarrow a = b = c = d = 0$
  - si $\lambda = 1$, on a $(S) \Longleftrightarrow c = b = d$

  $\boxed{\text{Conclusion}: sp_{\mathbb{R}}(f) = \{1\}}$

  et $\boxed{E_1(f) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | b = c = d\} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{R}^2\}}$

- $\boxed{\textbf{cas où } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$
  - si $\lambda = 1$ on a $(S) \Longleftrightarrow c = b = d$
  - si $\lambda = \exp(2i\pi/3) = j$ on a $(S) \Longleftrightarrow (a = 0, c = jb, d = j^2 b)$
  - si $\lambda = \exp(4i\pi/3) = j^2$ on a $(S) \Longleftrightarrow (a = 0, c = j^2 b, d = j^4 b = jb)$
  - sinon on a $(S) \Longleftrightarrow a = b = c = d = 0$

  $\boxed{\text{Conclusion}: sp_{\mathbb{C}}(f) = \{1, j, j^2\}}$ et

  $\boxed{E_1(f) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{C}^2\} = \{a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} | (a,b) \in \mathbb{C}^2\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

  $\boxed{E_j(f) = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ jb & j^2 b \end{pmatrix} | b \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix}) \text{ et } E_{j^2}(f) = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ j^2 b & jb \end{pmatrix} | b \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ j^2 & j \end{pmatrix}}$

exemple 10: dans un espace de polynômes

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\boxed{\begin{array}{rcl} f: E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array}}$ dans le cas où $E = \mathbb{R}[X]$

Solution:

1. *On s'intéresse aux solutions non triviales de l'équation* $f(P) = \lambda.P$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $P \in E$
2. *On commence par remarquer que* 0 *est valeur propre évidente:*
   en effet on a $P' = 0$ *pour tout polynôme constant.*
   Les vecteurs propres associés à la vp zéro sont les polynômes constants non nuls.
   On a $\boxed{E_0(f) = \mathbb{R}_0[X]}$
3. *Soit* λ *un réel non nul et* P *un polynôme.*
   Si $P' = \lambda.P$ *alors* P *et* P' *ont le même degré! Ce qui n'est possible que si* $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
   Ceci prouve que l'équation $f(P) = \lambda.P$ *possède que la solution triviale* $P = 0$,
   et donc que λ *n'est pas valeur propre.*
4. $\boxed{\textit{Conclusion: on a montré que } sp(f) = \{0\}}$

exemple 11: dans un espace de fonctions

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\boxed{\begin{array}{rcl} f: E & \longrightarrow & E \\ g & \longmapsto & g' \end{array}}$

dans le cas où $E = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Quelques remarques:

- *On a* $f(\sin) = \cos(\neq \lambda \sin)$ *donc* $\sin$ *n'est pas vecteur propre de* f
- *On a* $f(\exp) = \exp = 1.\exp$ *donc la fonction* $\exp$ *est* $\vec{v}.p$ *de* f *associée la v.p un*
- *Notons* h_0 *la fonction constante égale à un, on a* $f(h_0) = 0 = 0.h_0$
  ceci prouve que 0 *est v.p de* f *et que* h_0 *est un* $\vec{v}.p$ *associé*

Solution:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $g \in E$.
On s'intéresse aux solutions non triviales de l'équation $f(g) = \lambda.g$
L'équation $f(g) = \lambda.g$ *n'est rien d'autre que l'équation différentielle* $g' - \lambda.g = 0$
Le cours sur les équations différentielles nous indique que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé,*
la solution générale est $\boxed{\begin{array}{rcl} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\exp(\lambda.x) \end{array}}$ *avec* $K \in \mathbb{R}$.
On en déduit que tout réel λ *est valeur propre de* f *et que* $E_\lambda(f) = \{K.h_\lambda | K \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(h_\lambda)$ *où* h_λ
est la fonction définie par $\boxed{\begin{array}{rcl} h_\lambda: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\lambda x) \end{array}}$

$\boxed{\textit{Conclusion: } sp(f) = \mathbb{R} \textit{ et chaque sep est de dimension un}}$

exemple 12: dans un espace de suites

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $\boxed{\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & E \\ & u=(u_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & v=(v_n)_{n\geqslant 0}\end{array}}$ avec $\forall n \geqslant 0, v_n = u_{n+1}$

- le vecteur nul de E est la suite constante nulle
- Soit u une suite constante. On a bien sûr $f(u) = u = 1.u$
  ceci prouve déjà que 1 est v.p de f!
- Soit $u = (2^n)_{n\geqslant 0}$
  En notant $v = f(u)$ on a $\forall n \geqslant 0, v_n = u_{n+1} = 2^{n+1} = 2.2^n = 2.u_n$
  Ceci prouve que $f(u) = v = 2.u$
  Ainsi 2 est vp de f et $u = (2^n)_{n\geqslant 0}$ est un $\vec{v}.p$ associé
- Soit q un réel fixé non nul. On note $u = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$
  Comme ci-dessus, on montre que q est vp de f et $u = (q^n)_{n\geqslant 0}$ est un $\vec{v}.p$ associé
- Considérons la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 0 & \text{si } n \geqslant 1\end{cases}$
  En notant $v = f(u)$ on a $\forall n \geqslant 0, v_n = u_{n+1} = 0$ et donc $v = 0$ (la suite nulle)
  Ceci prouve que $f(u) = 0 = 0.u$
  Ainsi 0 est vp de f et u est un $\vec{v}.p$ associé

exemple 13: éléments propres des endomorphismes de référence

1. $\boxed{\text{homothétie de rapport } k \in \mathbb{C}}$
   - k est la seule valeur propre de f
   - tout vecteur non nul de E est vecteur propre de f associé à λ: $E_\lambda(f) = E$
2. $\boxed{\text{projection sur } F_1 \text{ parallélement à } F_2}$
   - $sp(f) = \{0,1\}$
   - $E_0(f) = F_2$ et $E_1(f) = F_1$
3. $\boxed{\text{symétrie vectorielle par rapport à } F_1 \text{ parallèlement à } F_2}$
   - $sp(f) = \{-1,1\}$
   - $E_{-1}(f) = F_2$ et $E_1(f) = F_1$

3 Eléments propres d'une matrice (V062)

3.1 endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée(rappel)

définition 6: application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ de leur respective base canonique.
Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{lcl} u: \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX\end{array}}$

Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ aux matrices unicolonnes
rem: on a déjà vu qu'à une matrice donnée on pouvait associer une infinité d'applications linéaires, il y en a une que l'on distingue c'est l'endomorphisme canoniquement associé.

définition 7: endomorphisme canoniquement associée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'endomorphisme canoniquement associé à A est l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice A lorsque l'on munit $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique.
Autrement dit, c'est l'application $\boxed{\begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array}}$
Dans cette définition, on identifie les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ aux matrices unicolonnes

exemple 14: déterminer l'endomorphisme canoniquement associé à

la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et celui associé à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.2 définitions et méthodes

définition 8:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle valeurs propres, vecteurs propres, spectre et sous-espaces propres de la matrice A les valeurs propres, vecteurs propres, spectre et sous-espaces propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est à dire:

1. λ est valeur propre de A ssi $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.
   Dans ce cas, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ
2. le sep de A associé à la vp λ est le noyau de $A - \lambda.I_n$
   ainsi

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda.I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, (A - \lambda.I_n)X = 0\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, AX = \lambda.X\}$$

   la sep $E_\lambda(A)$ correspond à l'ensemble des $\vec{v}.p$ de A auquel on ajoute la matrice unicolonne nulle

on notera que les vecteurs propres d'une matrice sont des matrices unicolonnes
rem: 0 est valeur propre d'une matrice ssi cette matrice n'est pas inversible

exemple 15:

1. La matrice I_n possède 1 comme unique valeur propre et toute matrice unicolonne autre que la matrice nulle est vecteur propre.
2. Soit A une matrice. On note λ une de ses valeurs propres et X un vecteur propre associé
   (a) Montrer que X est vecteur propre de la matrice A^2
   (b) Montrer que $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$ est valeur propre de la matrice $A^3 - 3A^2 + 4I_n$

exemple 16: valeurs propres et vecteurs propres évidents

Déterminer les vp et $\vec{v}.p$ évidents de $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

théorème 3:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

i) λ est une valeur propre de A

ii) λ est une racine du polynôme caractéristique χ_A

iii) l'endomorphisme $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

en particulier: 0 *est valeur propre de* A *ssi* A *n'est pas inversible*

démonstration:

méthode 3: comment déterminer les éléments propres d'une matrice A

1. On calcule le polynôme caractéristique de A, en calculant le déterminant de $X.I_n - A$.
   (ce qui revient à changer tous les signes de A et à ajouter un X sur la diagonale)
2. On détermine les racines de χ_A: on a ainsi les valeurs propres de A
3. Pour chacune de ses valeurs propres, on détermine le sous-espace propre associé $E_\lambda(A)$ en résolvant l'équation $A.X = \lambda.X$ ou $(A - \lambda.I_n).X = 0$ ou $(\lambda.I_n - A).X = 0$ d'inconnue la matrice unicolonne X

voir les nombreux exemples corrigés cachés sur le site

exemple 17: valeurs propres d'une matrice triangulaire

Déterminer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On retiendra que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

4 Propriétés des éléments propres (V063)

définition 9:

Soit $\lambda \in sp(f)$.
On dit que λ est une valeur propre d'ordre r de l'endomorphisme f[de la matrice A] lorsque λ est une racine de multiplicité r de χ_f[de χ_A]
On note $m(\lambda)$ la multiplicité de λ

remarque 3

- *dans le cas où λ est une racine de multiplicité un du polynôme caractéristique, la valeur propre λ est dite simple.*
- *dans le cas où λ est une racine de multiplicité deux du polynôme caractéristique, la valeur propre λ est dite double.*
- *les valeurs propres d'une matrice triangulaire, a fortiori diagonale, sont ses coefficients diagonaux de la matrice (comptés avec leur multiplicité)*

théorème 4: pour la démo, se placer dans une base judicieuse

Si λ est une valeur propre d'ordre $m(\lambda)$ de f [de A] **alors** $\boxed{1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)}$
En particulier, ***Si*** *λ est une valeur propre simple* ***alors*** *E_λ est une droite vectorielle*

exemple 18:

Si $\chi_f = (X-1)^2(X+3)^3(X+1)$ on peut dire que
i) $sp(f) = \{1, -3, -1\}$ (et également que $\dim E = 6$)
ii) $m(1) = 2$ et donc $1 \leqslant \dim E_1(f) \leqslant 2$
iii)
iv)

démonstration du théorème 4

exemple 19: important à avoir en tête

Montrer que

1. la somme des dimensions des sep d'un endomorphisme de E est toujours inférieure ou égale à $\dim E$
2. f possède au plus $n = \dim E$ vp distinctes
3. dans $\mathbb{C}$, f possède exactement $n = \dim E$ vp comptées avec leur multiplicité

théorème 5:
Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

démonstration:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$: "une famille de $\vec{v}.p$ de f associés à des valeurs propres distinctes est libre"

- **initialisation:** $\mathcal{P}_1$ est vraie.
  En effet, soit $\vec{v}_1$ un $\vec{v}.p$ de f.
  Comme $\vec{v}_1 \neq 0$, on sait que la famille $(\vec{v}_1)$ est libre.

- **initialisation:** $\mathcal{P}_2$ est vraie.
  En effet, soient $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ une famille de $\vec{v}.p$ associés à des valeurs propres distinctes
  Notons $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les vp respectives.

  Soit $(\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\mu_1.\vec{v}_1 + \mu_2.\vec{v}_2 = \vec{0}$ (*)

  En composant par f, qui est linéaire, on a

$$\mu_1.f(\vec{v}_1) + \mu_2.f(\vec{v}_2) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

  càd

$$\mu_1.\vec{v}_1 + \mu_2.\vec{v}_2 = \vec{0} \qquad (**)$$

  Considérons $(**) - \lambda_2(*)$, on obtient $\mu_1.(\lambda_1 - \lambda_2).\vec{v}_1 = \vec{0}$
  comme $\vec{v}_1 \neq 0$ car c'est un vecteur propre et que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ par hypothèse, on a forcément

$$\mu_1 = 0$$

  en reportant dans $(*)$, cela donne

$$\mu_2.\vec{v}_2 = \vec{0}$$

  comme $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ car c'est un vecteur propre, on a $\mu_2 = 0$
  ainsi $\mu_1 = \mu_2 = 0$
  On a bien montré que $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ est une famille libre

- **hérédité:** on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \geqslant 1$ quelconque fixé.
  Soient $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n+1})$ $n+1$ $\vec{v}.p$ de f associés à des vp distinctes notées respectivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$
  Nous allons montrer que $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n+1})$ est une famille libre.

  Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \mu_k.\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (*)$

  En composant par f (application linéaire) cela donne
$$\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.f(\vec{v}_k) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$
  or $\forall k \in [\![1,n]\!], f(\vec{v}_k) = \lambda_k.\vec{v}_k$ d'après ...
  d'où $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \mu_k.\lambda_k.\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (**)$
  En considérant $(**) - \lambda_{n+1}(*)$ cela donne
$$\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.\lambda_k.\vec{v}_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.\vec{v}_k = \vec{0}$$
  càd
$$\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k.(\lambda_k - \lambda_{n+1}).\vec{v}_k = \vec{0}$$
  soit
$$\sum_{k=0}^{n} \mu_k.(\lambda_k - \lambda_{n+1}).\vec{v}_k = \vec{0} \qquad (***)$$
  or par hypothèse de récurrence, à savoir $\mathcal{P}_n$ est vraie, on peut donc affirmer que $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ est une famille libre!
  D'après $(***)$, on en déduit que
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mu_k.(\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$$
  or $\forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k \neq \lambda_{n+1}$ (car les vp sont distinctes par hypothèse)
  d'où
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mu_k = 0$$
  on reporte dans $(*)$, cela donne $\mu_{n+1}.\vec{v}_{n+1} = \vec{0}$
  or $\vec{v}_{n+1} \neq \vec{0}$ car c'est un vecteur propre!
  D'où
$$\mu_{n+1} = 0$$
  On a bien montré que $\mu_1 = \cdots = \mu_n = \mu_{n+1} = 0$

théorème 6: c'est le corollaire

1. Si $\dim E = n$ alors tout endomorphisme de E possède au plus n valeurs propres distinctes
2. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres distinctes

démonstration

.

5 Annexe: rappels sur les polynômes

définition 10:

On dit que le scalaire α est racine de multiplicité r du polynôme P lorsqu'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - \alpha)^r.Q(X)$ avec $Q(\alpha) \neq 0$,
on note alors souvent $m(\alpha) = r$

exemple 20:

Soit $P = (X+1)^2(X-2)^3(X-1)(X^2+1)$

- Les racines réelles de P sont -1,2,1
- $m(-1) = 2, m(2) = 3$ et $m(1) = 1$
- Les racines réelles de P comptées avec leurs multiplicités sont $-1, -1$,2,2,2,1
- Les racines complexes de P sont -1,2,1,i et $-i$
- Les racines complexes de P comptées avec leurs multiplicités sont $-1, -1$,2,2,2,1,i et $-i$

théorème 7: caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées

Soit P un polynôme et α un scalaire.
Il y a équivalence entre:

i) α est racine d'ordre r de P

ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$

définition 11:

On dit qu' un polynôme $P(X)$ est scindé sur le corps $\mathbb{K}$ lorsqu'il peut s'écrire comme le produit de polynômes de degré un à coefficients dans $\mathbb{K}$

- $X^2 - 1$ *et* $X^2 - 2X + 1$ *sont des polynômes scindés sur* $\mathbb{R}$*.*
- $X^2 + 1$ *n'est pas un polynôme scindé sur* $\mathbb{R}$*.*

théorème 8: théorème de Gauss

Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$
et les racines complexes d'un polynômes à coefficients réels sont conjuguées deux à deux.

théorème 9: degré d'un polynôme dérivé

Soit P un polynôme.

- si $\deg(P) \geqslant 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$ sinon $\deg(P') = -\infty$

théorème 10: théorème de la division euclidienne
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que $A = B.Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$

exemple 21:
Déterminer le reste de la division euclidienne de X^5 par $(X-2)^3(X+1)$.

- d'après le théorème ci-dessus, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et un polynôme $Q(X)$ tels que $X^5 = (X-2)^3(X+1)Q(X) + aX^3 + bX^2 + cX + d$
- Pour $X = -1$ cela donne $1 = -a + b - c + d$
- Pour $X = 2$ cela donne $2^5 = 8a + 4b + 2c + d$
- En dérivant en prenant $X = 2$ cela donne $5.2^4 = 3a.2^2 + 2b.2 + c$
- En dérivant de nouveau et en prenant $X = 2$ cela donne $5.4.2^3 = 6a.2 + 2b$
- On résout le système constitué ces 4 équations
- On trouve que le reste est égal à $19X^3 - 34X^2 - 12X + 40$

6 Polynômes matriciels (V032)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $p \geqslant 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Par convention, on pose $A^0 = I_p$ et pour tout $k \geqslant 1$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Pour tout $P = P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.X^k = a_d.X^d + \cdots + a_1.X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$

On pose $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.A^k = a_d.A^d + \cdots + a_1.A + a_0.A^0 = a_d.A^d + \cdots + a_1.A + a_0.I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

proposition 2 (*propriétés:*)

Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
i) $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$
ii) $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$
iii) $(\lambda.P)(A) = \lambda.P(A)$

proposition 3 (*différence notable*)

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$
i) $P.Q = 0 \Longrightarrow P = 0$ *ou* $Q = 0$
ii) $P(X).Q(X) = 0 \Longrightarrow P(X) = 0$ *ou* $Q(X) = 0$
iii) mais $P(A).Q(A) = 0 \not\Longrightarrow P(A) = 0$ *ou* $Q(A) = 0$
exemple: si $A.(A - I_n) = 0$ *on n'a pas forcément* $A = 0$ *ou* $A = I_n$

exemple 22:
Notons $P = X^2 - 3X + 1$ et $Q = X - 2$

7 Polynômes d'endomorphismes (V033)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel
Soit f un endomorphisme de E.
Par convention, on pose $f^0 = id_E$ et pour tout $k \geqslant 1, f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Pour tout $P = P(X) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.X^k = a_d.X^d + \cdots + a_1.X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$

On note $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k.f^k = a_d.f^d + \cdots + a_1.f + a_0.f^0 = a_d.f^d + \cdots + a_1.f + a_0.id_E \in \mathcal{L}(E)$

proposition 4 (*propriétés:*)

Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
i) $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$
ii) $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$
iii) $(\lambda.P)(f) = \lambda.P(f)$

proposition 5 (*différence notable*)

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$
i) $P.Q = 0 \Longrightarrow P = 0$ *ou* $Q = 0$
ii) $P(X).Q(X) = 0 \Longrightarrow P(X) = 0$ *ou* $Q(X) = 0$
iii) mais $P(f) \circ Q(f) = 0 \not\Longrightarrow P(f) = 0$ *ou* $Q(f) = 0$
exemple: si $f^2 = f \circ f = 0$ on n'a pas forcément $f = 0$

exemple 23:

Notons $P = X - 1$ et $Q = (X+3)$

exemple 24:

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$
Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
Montrer que $P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f))$

8 Complément: matrice réelle vue comme une matrice complexe

définition 12:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On appelle matrice conjuguée de A et on note $\overline{A}$, la matrice de coefficient générique $\overline{a_{i,j}}$.

proposition 6

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

i.) $\overline{\overline{A}} = A$

ii.) $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$

iii.) $\overline{\lambda.A} = \overline{\lambda}.\overline{A}$

démonstration:

Nous allons utiliser le fait que pour les scalaires complexes on a $\boxed{\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2} \text{ et } \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}}$
Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

i) trivial car $\overline{\overline{a_{ij}}} = a_{ij}$ pour tout (i,j)

ii) Notons $C = \overline{A}.\overline{B} = (c_{ij})$ et $D = AB = (d_{ij})$.

- $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$ d'après la formule du produit matriciel,

  et donc $\overline{d_{ij}} = \overline{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}.b_{kj}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}.\overline{b_{kj}}$
- $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}.\overline{b_{kj}}$ d'après la formule du produit matriciel,
- On a bien prouvé que pour tout (i,j) on a $c_{ij} = \overline{d_{ij}}$, c'est à dire $C = \overline{D}$ (cqfd)

iii) Notons $E = \lambda.A = (e_{ij})$ et $F = \overline{\lambda}.\overline{A} = (f_{ij})$

- on a $e_{ij} = \lambda.a_{ij}$ et donc $\overline{e_{ij}} = \overline{\lambda.a_{ij}} = \overline{\lambda}.\overline{a_{ij}}$
- on a aussi $f_{ij} = \overline{\lambda}.\overline{a_{ij}}$
- on a bien prouvé que pour tout (i,j) on a $\overline{e_{ij}} = f_{ij}$, c'est à dire que $\overline{E} = F$

proposition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si λ est une vp complexe non réelle de A alors $\overline{\lambda}$ est aussi une vp de A, et de plus les sep sont conjuguées : $E_{\overline{\lambda}} = \overline{E_\lambda}$

démonstration:

elle repose sur l'équivalence

$$AX = \lambda.X \iff \overline{AX} = \overleftarrow{\lambda.X} \iff \overline{A}.\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X} \iff A.\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X}$$

(comme A est à coefficients réels, on a $\overline{A} = A$)

9 Calcul de A^n par polynôme annulateur (V034)

définition 13: polynôme annulateur (vocabulaire HP)

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $p \geqslant 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
On appelle polynôme annulateur de A tout polynôme P tel que $P(A) = 0$

exemple 25:

$P = P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
En effet:

exemple 26:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $P = (X-1)^2.(X-2)$ est un polynôme annulateur de A
En effet:

exemple 27:

Si A est la matrice d'un projecteur alors $P = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A
En effet:
Soit A la matrice d'un projecteur
ceci signifie qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$ avec $f^2 = f$
On a donc $A^2 = A$, càd $A^2 - A = 0$

méthode 4: calcul de A^n par polynôme annulateur

La méthode consiste à

- considérer la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme P,
- calculer le reste
- remplacer l'indéterminée X par la matrice A

Soit $n \in \mathbb{N}$
d'après le théorème de la division euclidienne,

$$\exists!(Q\,,R) \in \mathbb{K}[X]^2, X^n = P.Q + R \qquad \textit{avec } \deg(R\,) < \deg(P)$$

En passant au polynôme matriciel, cela donne

$$A^n = P(A).Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A)$$

Il suffit donc de connaître R_n pour obtenir A^n !

exemple 28:

Déterminer A^n lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$

On a vu $P = P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de la matrice A
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Effectuons la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme P.
Par théorème, on sait que

$$\exists\,!\,(Q_n\,,R_n) \in \mathbb{K}[X]^2, X^n = P.Q_n + R_n \qquad \text{avec } \deg(R_n\,) < \deg(P) = 2$$

Ainsi

$$\exists\,!\,(Q_n,a_n,b_n) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}, X^n = (X^2 - 3X + 2).Q_n + a_n.X + b_n$$

exemple 29: Toute matrice possède un polynôme annulateur non trivial

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à p^2

théorème 11: théorème de Cayley-Hamilton- HP

Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.

exemple 30: classique

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer que si P est un polynôme annulateur de A tel que $P(0) \neq 0$ alors A est inversible