ENSEMBLES DENOMBRABLES - TRIBUS

Table des matières

1 Injection, surjection, bijection (rappels) V124

définition 1:
Soient E et F deux ensembles et f une application de $E \to F$.

i) On dit que f est surjective lorsque tout élément de F possède **au moins** un antécédent (par f).

mathématiquement cela s'écrit $\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)}$

et cela signifie que

$$\boxed{\text{pour tout } y \in F \text{ fixé, l'équation } y = f(x) \text{ possède au moins une solution}}$$

ii) On dit que f est injective lorsque tout élément de F possède **au plus** un antécédent (par f).

mathématiquement cela s'écrit $\boxed{\forall (x_1,x_2) \in E^2, (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)}$

et cela signifie que

$$\boxed{\text{pour tout } y \in F \text{ fixé, l'équation } y = f(x) \text{ possède au plus une solution}}$$

iii) On dit que f est bijective lorsque tout élément de F possède **un unique** antécédent (par f).

mathématiquement cela s'écrit $\boxed{\forall y \in F, \exists !\, x \in E, y = f(x)}$

et cela signifie que

$$\boxed{\text{pour tout } y \in F \text{ fixé, l'équation } y = f(x) \text{ possède une unique solution}}$$

rem: il est équivalent à dire que f est injective lorsque $\boxed{\forall (x_1,x_2) \in E^2, (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))}$

méthode 1: comment montrer qu'une application est surjective
Soient E et F deux ensembles et f une application de $E \to F$.

1. On se fixe $y \in F$ quelconque, et on montre que l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution
2. Dans le cas où f est une application linéaire, on sait que l'on a l'équivalence

   $$\boxed{f \text{ surjective ssi } Im(f) = F}$$

   si de plus, E est un ev de dimension finie, on sait que l'on a l'équivalence

   $$\boxed{f \text{ surjective ssi } \mathrm{rg}(f) = \dim F}$$

méthode 2: comment montrer qu'une application est injective

Soient E et F deux ensembles et f une application de $E \to F$.

1. On considère $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$
2. Si f est strictement monotone alors on peut affirmer directement que f est injective
3. Dans le cas où f est une application linéaire, on sait que l'on a l'équivalence

$$\boxed{f \text{ injective ssi } \ker(f) = \{\vec{0}\}}$$

théorème 1: application réciproque

Soient E et F deux ensembles et f une application de $E \to F$.
Il y a équivalence entre

i) f est bijective

ii) il existe une application $g : F \to E$ telle que $\begin{cases} f \circ g & = id_F \\ g \circ f & = id_E \end{cases}$

Dans ce cas, g est aussi une application bijective et est appelé l'application réciproque de f

exemple 1:

A l'aide du théorème précédent, il est facile de montrer que la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} th : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,+1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}}$

est une application bijective de fonction réciproque $\boxed{\begin{array}{rcl} g :]-1,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}.\ln\dfrac{1+x}{1-x} \end{array}}$

méthode 3: comment montrer qu'une application est bijective

Soient E et F deux ensembles et f une application de $E \to F$.

1. On se fixe $y \in F$ quelconque, et on montre que l'équation $y = f(x)$ possède une et une seule solution. (soit en la résolvant, soit en utilisant le théorème de la bijection)
2. Dans le cas où E et F sont <u>deux sev de même dimension finie</u> et f une <u>application linéaire</u>, on sait que l'on a les équivalences

$$\boxed{f \text{ bijective ssi } \ker(f) = \{\vec{0}\} \text{ ssi } rg(f) = \dim F \text{ ssi } \det(f) \neq 0 \text{ ssi l'image d'une base...}}$$

théorème 2: théorème de la bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone.
Alors:

1. $J = f(I)$ est un intervalle
2. f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
3. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et de même sens de variation que f
4. si de plus f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annulle pas alors f^{-1} est dérivable sur J et l'on a $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

interprétation géométrique:

- *La courbe représentative de f^{-1} est symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice*
- *la pente de la tangente à courbe représentative de f^{-1} au point $(f(x_0),x_0)$ est l'inverse de la pente de la tangente à la courbe représentative de f en $(x_0,f(x_0))$*

exemple 2: $\mathbb{R}$ et $]-\pi/2,\pi/2[$ sont en bijection

- $I =]-\pi/2,\pi/2[$ *est un intervalle*
- *La fonction* tan *est continue et strictement croissante sur I*
- *Par le théorème de la bijection, on peut affirmer que*
  i) $J = f(I)$ *est un intervalle et* $f(I) = f(]-\pi/2,+\pi/2[=]\lim\limits_{-\pi/2^+} \tan, \lim\limits_{-\pi/2^-} \tan[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$
  ii) tan *réalise une bijection de* $I =]-\pi/2,\pi/2[$ *sur* $J = \mathbb{R}$

théorème 3:

la composée de 2 bijections est encore une bijection

2 Ensembles finis

définition 2:
On dit qu'un ensemble E est fini,
ou qu'il possède un nombre fini d'éléments,
lorsqu'il existe un entier naturel N non nul
et une bijection ϕ de $[\![1,N]\!] \to E$.
Dans ce cas, on dit que N est le cardinal de E,
on note $N = \text{card}(E) = \sharp E = |E|$
On convient que l'ensemble vide a pour cardinal zéro: c'est le seul ensemble de cardinal nul.

remarque 1

- *Un ensemble fini est donc un ensemble pour lequel on peut numéroter(ce qui revient à les compter) ses éléments avec un indice décrivant un intervalle d'entiers du type* $[\![1,N]\!]$
- *Si* $\text{card}(E) = n$ *on peut décrire* E *sous la forme* $E = \{x_n | n \in [\![1,N]\!]\} = (x_n)_{n \in [\![1,N]\!]}$
- *mais attention! un ensemble* E *qui s'écrit sous la forme* $E = \{x_n | n \in [\![1,N]\!]\}$ *ne possède pas forcément* N *éléments distincts!*
  exemple
  l'ensemble $E = \{x_n | n \in [\![1,5]\!]\}$ *où* x_n *est défini comme étant le reste de le division euclidienne de* n *par 3 est un ensemble qui ne possède que 3 éléments (distincts)*
  En effet: $x_1 = x_4 = 1, x_2 = x_5 = 2$ *et* $x_3 = 0$ *et donc* $E = \{0, 1, 2\}$

théorème 4: se généralise avec la formule de Poincaré(cf. exo)
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
et dans le cas particulier où A et B sont disjoints, on a $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

théorème 5:
Deux ensembles finis de même cardinal sont en bijection

remarque: nous allons voir que deux ensembles infinies ne sont pas forcément en bijection et également que deux ensembles infinis peuvent être en bijection même si l'un est strictement inclus dans l'autre!

démo:
Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis de cardinal N.
On sait alors que

- il existe une bijection ϕ_1 de $[\![1,N]\!] \to E_1$
- il existe une bijection ϕ_2 de $[\![1,N]\!] \to E_2$

Comme l'application réciproque d'une bijection est encore une bijection et que la composée de deux bijections est toujours une bijection, on peut affirmer $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est une bijection de $E_1 \to E_2$

théorème 6: cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini
Soit E un ensemble fini de cardinal N.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties(=sous-ensembles de E).
$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble de cardinal fini et $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^N$

3 Ensembles dénombrables

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des ensembles infinis .

Sont-ils en bijection pour autant?

La réponse est NON!

définition 3: ensemble dénombrable
Un ensemble E est dénombrable lorsqu'il existe une bijection de $\mathbb{N} \to E$

remarque 2

- *E est un ensemble dénombrable lorsqu'il existe une bijection ϕ telle que $E = \{\phi(n)/n \in \mathbb{N}\}$ avec les $\phi(n)$ distincts 2 à 2. (plutôt que d'utiliser cette notation, on utilise la notation indicielle)*
E est donc un ensemble dénombrable lorsque l'on peut écrire $E = \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n distincts deux à deux ou $E = \{x_n/n \in \mathbb{N}^*\}$ avec les x_n distincts deux à deux

proposition 1

Il y a équivalence entre:
1. *il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E*
2. *il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$*

On pourra donc dire dans ce cas que E et $\mathbb{N}$ sont en bijection
(ou encore il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$)

démo *En effet:*
- $\boxed{1 \Rightarrow 2}$, *car si ϕ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur E alors ϕ^{-1} est une bijection de E sur $\mathbb{N}$.*
- $\boxed{2 \Rightarrow 1}$, *car si ϕ est une bijection de E sur $\mathbb{N}$ alors ϕ^{-1} est une bijection de de $\mathbb{N}$ sur E.*

exemple 3: ensembles dénombrables remarquables (à retenir)
1. $\mathbb{N}$ est dénombrable! en effet $id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection
2. $\mathbb{N}^*$ *A noter que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont en bijection*
alors que $\mathbb{N}$ a clairement un élément de plus que $\mathbb{N}^*$;-)
3. l'ensemble des nombres pairs $E = \{2n/n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable
4. l'ensemble des nombres impairs $E = \{2n + 1/n \in \mathbb{N}\}$
5. l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable
6. l'ensemble des couples d'entiers naturels $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
7. l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$

.

♠ exemple 4: $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable!...et [0,1[non plus!
Grâce au procédé de Cantor, on montre que l'intervalle [0,1[n'est pas dénombrable!
(et donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable non plus (cf. hypothèse du continu)

Dans la démonstration, on utilise le fait que tout réel possède un développement décimal propre (c'est à dire qui ne se termine pas par une suite infinie de 9')

Supposons qu'il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow [0,1[$

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= 0{,}15824578268245878966\ldots\\
\phi(1) &= 0{,}25248795326878911452\ldots\\
\phi(2) &= 0{,}124784414141115768\ldots\\
\phi(3) &= 0{,}22222222222222222222\ldots\\
\phi(4) &= 0{,}98968962151573268\ldots\\
\phi(5) &= 0{,}787852544100214588569\ldots\\
\phi(6) &= 0{,}100000000000000000000\ldots\\
\phi(7) &= 0{,}35252012456325892345\ldots\\
\phi(8) &= 0{,}1212121212121212\ldots\\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Considérons le réel 0,
Par construction, le réel ci-dessus n'est pas un réel du type $\phi(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Ceci prouve que ϕ n'est pas surjective:
Contradiction!

$\boxed{\text{Conclusion: il n'existe pas de bijection entre } \mathbb{N} \text{ et } [0,1[}$

4 Rappels classiques de dénombrement V127

définition 4: $p-$**liste ou** $p-$**uplet**
Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ un entier.
On appelle <u>$p-$liste d'éléments de E</u> (ou encore $p-$uplet) tout élément de E^p
exemple:
Si $E = \{1{,}3{,}5\}$ *il y a neuf* $2-$*listes, à savoir*

(1,1) (1,3) (1,5) (3,1) (3,3) (3,5) (5,1) (5,3) (5,5)

et vingt-sept $3-$*listes, à savoir*

(1,1,1) (1,1,3) (1,1,5) (1,3,1) (1,3,3) (1,3,5) (1,5,1) (1,5,3) (1,5,5)

(3,1,1) (3,1,3) (3,1,5) (3,3,1) (3,3,3) (3,3,5) (3,5,1) (3,5,3) (3,5,5)

(5,1,1) (5,1,3) (5,1,5) (5,3,1) (5,3,3) (5,3,5) (5,5,1) (5,5,3) (5,5,5)

théorème 7:
Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ un entier.
Le nombre de $p-$ listes de E est n^p (on a $card(E^p) = (card(E))^p$)

schéma

définition 5: $p-$**arrangement**
Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $1 \geqslant p \geqslant n$ un entier.
On appelle <u>$p-$arrangement de E</u> toute $p-$liste d'éléments de E deux à deux distincts
exemple:
Si $E = \{1{,}3{,}5\}$ *il y a six* $2-$*listes, à savoir*

~~(1,1)~~ (1,3) (1,5) (3,1) ~~(3,3)~~ (3,5) (5,1) (5,3) ~~(5,5)~~

et six $3-$*listes aussi, à savoir*

~~(1,1,1)~~ ~~(1,1,3)~~ ~~(1,1,5)~~ ~~(1,3,1)~~ ~~(1,3,3)~~ (1,3,5) ~~(1,5,1)~~ (1,5,3) ~~(1,5,5)~~

~~(3,1,1)~~ ~~(3,1,3)~~ (3,1,5) ~~(3,3,1)~~ ~~(3,3,3)~~ ~~(3,3,5)~~ (3,5,1) ~~(3,5,3)~~ ~~(3,5,5)~~

~~(5,1,1)~~ (5,1,3) ~~(5,1,5)~~ (5,3,1) ~~(5,3,3)~~ ~~(5,3,5)~~ ~~(5,5,1)~~ ~~(5,5,3)~~ ~~(5,5,5)~~

théorème 8:
Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant n$ un entier.
Le nombre de $p-$arrangement de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ (on le note parfois A_n^p mais HP)

précision:
Dans le cas particulier d'un $n-$*arrangement, on parle aussi de <u>permutation</u>.*
Il y a $n!$ *permutations d'un ensemble de cardinal* n

schéma explicatif

définition 6: $p-$combinaison

Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant n$ un entier.

On appelle <u>$p-$combinaison de E</u> toute partie(=sous-ensemble de E) à p éléments

exemple:

Si $E = \{1,3,5,7\}$ il y 6 parties à deux éléments, à savoir

$$\{1,3\} \qquad \{1,5\} \qquad \{1,7\} \qquad \{3,5\} \qquad \{3,7\} \qquad \{5,7\}$$

et 4 parties à 3 éléments, à savoir

$$\{1,3,5\} = \overline{\{7\}} \qquad \{1,3,7\} = \overline{\{5\}} \qquad \{1,5,7\} = \overline{\{3\}} \qquad \{3,5,7\} = \overline{\{1\}}$$

théorème 9:

Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant n$ un entier.

Il y a $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (lire "p parmi n") parties de E à p éléments

théorème 10: propriétés des coefficients binomiaux

Lorsque les coefficients ci-dessous ont un sens, on a

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
3. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (triangle de pascal)
4. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}, (a+b)^n = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

remarque:

très souvent, par convention, lorsque $p > n$ on pose $\binom{n}{p} = 0$

Il faut aussi savoir redémontrer les formules suivantes:

- *Formule de Vandermonde* $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$
- pour $1 \leqslant p \leqslant n$ on a $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$

démo

.

théorème 11:
Si E est un ensemble de cardinal fini n alors $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^n$

démo:
Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, notons E_p le nombre de sous-ensembles de E à p éléments
Comme $\mathcal{P}(E) = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \bigcup\limits_{p=0}^{p=n} E_p$, et que les E_p sont disjoints deux à deux,
on sait que $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{card}(E_p)$
Or on sait également que $\operatorname{card}(E_p) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$
Ainsi $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum\limits_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \sum\limits_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} .1^p.1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n$

exemple 5:

1. Déterminer le nombre de numéros de téléphone commençant par 06
2. Déterminer le nombre de numéros de téléphone commençant par 06 et composés de 10 chiffres distincts
3. Déterminer le nombre de numéros de téléphone commençant par 06 et composés des chiffres 0,1,1,1,2,2,3,3,4,6

5 Tribu (V125)

5.1 Opérations avec un nombre fini d'ensembles (rappels)

On rappelle que:

i) Ω désigne un ensemble appelé *univers*.

ii) Il est d'usage en probabilités de noter ω un élément quelconque de l'ensemble Ω (plutôt que x).

iii) Les sous-ensembles de Ω sont notées à l'aide d'une lettre majuscule: $A, B, \ldots$

On a les définitions suivantes:

- $\omega \in \overline{A} \Longleftrightarrow \omega \notin A$ *($\overline{A}$ = complémentaire de A)*
- $\omega \in A \cup B \Longleftrightarrow \omega \in A$ ou $\omega \in B$
- $\omega \in A \cap B \Longleftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B$
- $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N \Longleftrightarrow \exists j \in [\![1,N]\!], \omega \in A_j$ *(union d'une nombre fini d'ensembles)*
- $\omega \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N \Longleftrightarrow \forall j \in [\![1,N]\!], \omega \in A_j$ *(intersection d'une nombre fini d'ensembles)*

théorème 12: Lois de De Morgan (Rappel)

i) Soient A et B deux ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*)

$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

ii) Soient A, B et C trois ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

iii) Soient $(A_i)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ un nombre fini d'ensembles (*ou événements si vocabulaire des probabilités*). On a

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N} = \overline{\bigcup_{j=1}^{N} A_j} = \bigcap_{j=1}^{N} \overline{A_j} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_N}$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N} = \overline{\bigcap_{j=1}^{N} A_j} = \bigcup_{j=1}^{N} \overline{A_j} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cap \overline{A_N}$$

$$B \bigcap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = (B \cap A_1) \bigcup (B \cap A_2) \bigcup \cdots \bigcup (B \cap A_N)$$

$$B \bigcup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = (B \cup A_1) \bigcap (B \cup A_2) \bigcap \cdots \bigcap (B \cup A_N)$$

5.2 Opérations avec un nombre dénombrable d'ensembles

définition 7: intersection ou union dénombrable

Soit Ω un ensemble(=univers) et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de Ω

1. On note $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent au moins à un ensemble A_n.
   Ainsi:
   $$\boxed{\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \omega \in A_n}$$
2. On note $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les ensembles A_n.
   Ainsi:
   $$\boxed{\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n}$$

remarque 3 (***avec le vocabulaire probabiliste***)

- $\omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow$ *au moins un des évènements A_n est réalisé*
- $\omega \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow$ *tous les évènements A_n sont réalisés*

remarque 4 (***unification des définitions***)

Soit I un ensemble d'indices fini ou dénombrable.
On a

- $\boxed{\omega \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I, \omega \in A_i}$ càd $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall i \in I, \omega \in A_i\}}$
- $\boxed{\omega \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I, \omega \in A_i}$ càd $\boxed{\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, i \in I, \omega \in A_i\}}$

exemple 6: On considère $\Omega = \mathbb{N}$

Dans les quatre cas suivants, indiquer ce que valent $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

1. $A_n = \{n\}$
2. $A_n = \{n,n+1\}$
3. $A_n = \{0,1,2,\dots,n\} = [\![0,n]\!]$
4. $A_n = \{n,n+1,n+2,n+3,\dots\} = \{p \geqslant n | p \in \mathbb{N}\}$

théorème 13: Loi de De Morgan

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous ensembles de Ω et B un sous-ensemble de Ω

1. $\boxed{\overline{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, $\boxed{\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$
2. $\boxed{B\bigcap(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (B\bigcap A_n)}$, $\boxed{B\bigcup(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (B\bigcup A_n)}$

rem: soulagés de constater que ce sont les mêmes qu'avec un nombre fini d'ensembles!

- *"Le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires."*
- *"Le complémentaire d'un intersection est l'union des complémentaires"*

démonstration

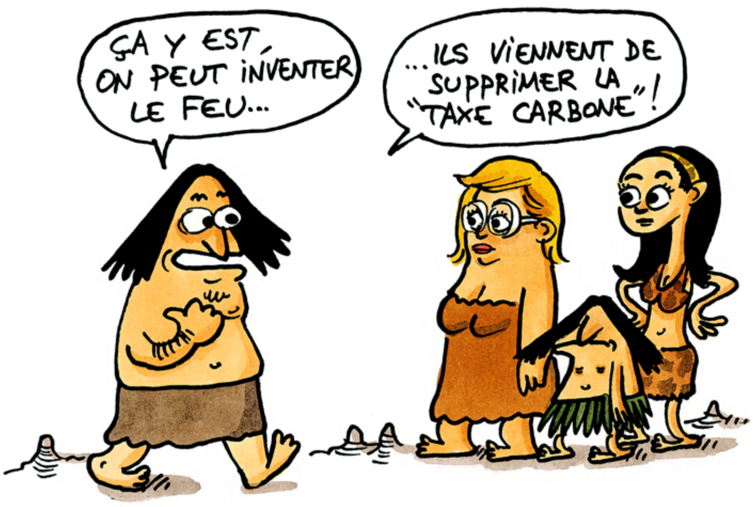
On a les équivalences

$$\omega \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \Longleftrightarrow \omega \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \notin A_n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \overline{A_n} \Longleftrightarrow \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

$$\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in \overline{A_n} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega \notin A_n \Longleftrightarrow \omega \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$$

$$\omega \in B\bigcap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega \in \quad B \\ \text{et} \\ \omega \in \quad \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega \in B \\ \text{et} \\ \exists n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in A_n \end{cases} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in B \cap A_n \Longleftrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B\bigcap A_n)$$

$$\omega \in B\bigcup(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega \in \quad B \\ \text{ou} \\ \omega \in \quad \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega \in B \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in A_n \end{cases} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in B \cup A_n \Longleftrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B\bigcup A_n)$$



5.3 tribu

définition 8: axiomes des tribus

Soit Ω un ensemble non vide.
On dit qu'une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est <u>une tribu</u> lorsqu'elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $\Omega \in \mathcal{T}$

ii) Si $A \in \mathcal{T}$, alors le complémentaire $\overline{A} \in \mathcal{T}$ ("stabilité par passage au complémentaire")

iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ("stabilité par union dénombrable")

- *Une tribu est donc <u>un ensemble</u> de sous-ensembles de Ω*
- *c'est à dire qu'une tribu est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$*
- *Les éléments de la tribu sont appelés <u>les événements</u>*

théorème 14:

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu.
Alors :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ("stabilité par intersection dénombrable")
3. $\mathcal{T}$ est stable par unions et intersections finies

A retenir: une tribu est un ensemble de parties de Ω qui contient l'ensemble vide et Ω, qui est stable par complémentarité, et par intersection ou réunion finies ou dénombrables.

démonstration

1. On sait que $\Omega \in \mathcal{T}$

   et $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire

   donc $\overline{\Omega} \in \mathcal{T}$ càd $\emptyset \in \mathcal{T}$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$

   comme $A_n \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire, on a $\overline{A_n} \in \mathcal{T}$

   Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{A_n} \in \mathcal{T}$ et que $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, on a $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{T}$

   et donc $\overline{B} \in \mathcal{T}$, car $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire

   or $\overline{B} = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{\overline{A_n}} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

   On a bien montré que $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable

3. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous allons poser
$$B_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant N \\ \emptyset & \text{si } n \geqslant N+1 \end{cases}$$
   On constate que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{T}$

   Comme $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, on peut dire que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$

   Or $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{N} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{N} A_n$

   On a prouvé que $\bigcup\limits_{n=0}^{N} A_n \in \mathcal{T}$

   et donc $\mathcal{T}$ est stable par union finie
4. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous allons poser
$$C_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant N \\ \Omega & \text{si } n \geqslant N+1 \end{cases}$$
   On constate que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{T}$

   Comme $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable, on peut dire que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{T}$

   Or $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcap\limits_{n=0}^{N} C_n = \bigcap\limits_{n=0}^{N} A_n$

   On a prouvé que $\bigcap\limits_{n=0}^{N} A_n \in \mathcal{T}$

   et donc $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie

remarque 5 (*vocabulaire*)

- *Un singleton $\{w\}$ est appelé un événement élémentaire.*
- *L'événement $\overline{A}$ est appelé l'événement contraire de l'événement A*
- *L'événement Ω est appelé l'événement certain,*
- *l'événement $\emptyset$ est appelé l'événement impossible.*
- *deux événements sont dit incompatibles lorsque leur intersection est l'ensemble vide.*
  càd
$$A \text{ et } B \text{ incompatibles} \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont disjoints}$$
- *On dit que la famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements incompatibles deux à deux lorsque $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$*