# ESPACES PREHILBERTIENS REELS

Dans ce chapitre, $E$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie ou pas.

## Table des matières



---

*Dans* $\mathbb{R}^2$ *et dans* $\mathbb{R}^3$*, nous employons couramment le produit scalaire défini par* $\vec{x}.\vec{y} = ||\vec{x}||.||\vec{y}||.\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$

*Il s'agit d'un produit scalaire particulier que l'on appelle le produit scalaire usuel sur* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$

*Dans ce polycopié, nous allons donner une définition de produit scalaire plus générale qui nous permettra d'effectuer des produits scalaires entre des polynômes, entre des matrices ou entre des fonctions, ou également entre des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $n \geqslant 2$ *!*

---

# 1 Espaces préhilbertiens réels

## 1.1 produit scalaire

**définition 1: forme bilinéaire**

On appelle forme bilinéaire sur $E$ toute application $<.|.>$ définie sur $E^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

i) pour tout $\vec{x} \in E$ fixé, l'application $\boxed{\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{y} & \longmapsto & <\vec{x},\vec{y}> \end{array}}$ est linéaire.[linéarité à droite]

On note parfois cette application $<\vec{x},.>$

ii) pour tout $\vec{y} \in E$ fixé, l'application $\boxed{\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & <\vec{x},\vec{y}> \end{array}}$ est linéaire.[linéarité à gauche]

On note parfois cette application $<.,\vec{y}>$

*rem: on a déjà vu que le déterminant était une application blinéaire sur* $\mathbb{R}^2$

**remarque 1 (*règle de calcul*)**

*Par bilinéarité, on peut 'développer':*

$$\begin{aligned} <a\vec{x}+b\vec{y},c\vec{z}+d\vec{t}> &= a<\vec{x},c\vec{z}+d\vec{t}> + b<\vec{y},c\vec{z}+d\vec{t}> \\ &= a\left(c<\vec{x},\vec{z}> + d<\vec{x},\vec{t}>\right) + c\left(<\vec{y},\vec{z}> + d<\vec{y},\vec{t}>\right) \\ &= ac<\vec{x},\vec{z}> + ad<\vec{x},\vec{t}> + bc<\vec{y},\vec{z}> + bd<\vec{y},\vec{t}> \end{aligned}$$

*et d'une manière plus générale*

$$<\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{x}_i,\sum_{j=1}^{m}\mu_j\vec{y}_j> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j<\vec{x}_i,\vec{y}_j>$$

*On aura aussi*

$$\forall\vec{x}\in E,\forall\vec{y}\in E,\ <\vec{x},\vec{0}> = <\vec{0},\vec{y}> = 0$$

*on retiendra que "le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur"*

**exemple 1:**

Soit $I=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On note $E=C^0(I,\mathbb{R})$.

On considère l'application $\boxed{\begin{array}{lcl} <\ ,\ >: E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_I fg = \int_a^b f(t)g(t)dt \end{array}}$

Grâce à la linéarité de l'application $\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I f \end{array}$ (on dit rapidement "la linéarité de l'intégrale"),

on va pouvoir prouver que $<\ ,\ >$ est une application bilinéaire sur $E$. En effet:

i) linéarité à droite: soient $(f,g_1,g_2)\in E^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$<f,\lambda g_1+g_2> = \int_I f.(\lambda g_1+g_2) = \int_I \lambda fg_1 + fg_2 = \lambda\int_I fg_1 + \int_I fg_2 = \lambda<f,g_1> + <f,g_2>$$

ii) linéarité à gauche: soient $(f_1,f_2,g)\in E^3$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$$<\lambda f_1+f_2,g> = \int_I(\lambda f_1+f_2).g = \int_I \lambda f_1g + f_2g = \lambda\int_I f_1g + \int_I f_2g = \lambda<f_1,g> + <f_2,g>$$

**définition 2: produit scalaire**

On dit que $<\,,\,>$ est un produit scalaire sur $E$ lorsque :

i) $<\,,\,>$ est une forme bilinéaire sur $E$.

ii) $<\,,\,>$ est symétrique : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ <\vec{x},\vec{y}>=<\vec{y},\vec{x}>$

iii) $<\,,\,>$ est positive : $\forall \vec{x} \in E,\ <\vec{x},\vec{x}> \geqslant 0$

iv) $<\,,\,>$ est définie : $\forall \vec{x} \in E, (<\vec{x},\vec{x}>=0 \Longleftrightarrow \vec{x}=\vec{0})$

remarques:

- Attention! le terme **définie** n'a ici aucun rapport avec l'ensemble de définition.
- Suivant les ouvrages, le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sera noté $<\vec{x},\vec{y}>$ ou $\Phi(\vec{x},\vec{y})$ ou $(\vec{x}|\vec{y})$ ou plus simplement $\vec{x}.\vec{y}$
- Les points iii) et iv) signifient encore que $\begin{cases} \vec{x}=\vec{0} \Longleftrightarrow & <\vec{x},\vec{x}>=0 \\ \vec{x}\neq\vec{0} \Longleftrightarrow & <\vec{x},\vec{x}>>0 \ \text{(inégalité stricte)} \end{cases}$

**définition 3: espace préhilbertien réel, espace euclidien**

- On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ muni d'un produit scalaire. On le note $(E,<\,,\,>)$.
- On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie muni d'un produit scalaire. On le note $(E,<\,,\,>)$.

**théorème 1:**

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$.
Si $\varphi$ est linéaire à gauche et symétrique alors $\varphi$ est bilinéaire

**exemple 2: Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?**

Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel. On considère $\vec{y}$ et $\vec{z}$ deux vecteurs de $E$.

i) S'il existe $\vec{x} \in E$ tel que $<\vec{x},\vec{y}>=<\vec{x},\vec{z}>$ alors $\vec{y}=\vec{z}$

ii) Si pour tout $\vec{x} \in E$ on a $<\vec{x},\vec{y}>=<\vec{x},\vec{z}>$ alors $\vec{y}=\vec{z}$.

**exemple 3: produit scalaire sur l'ev des fonctions continues sur un segment**

Pour toutes fonctions $f$ et $g$ de $C^0([a,b],\mathbb{R})$, on pose $<f,g>=\int_{[a,b]} fg$

1. Montrer que $<\,,\,>$ est un produit scalaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$.
2. $(C^0([a,b],\mathbb{R}),<\,,\,>)$ est-il un espace euclidien?

**méthode 1: arguments souvent utilisés pour justifier le caractère *défini***

- Une somme de carrés de réels est nulle ssi chaque terme est nul
- Une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul
- Un polynôme est le polynôme nul ssi il possède une infinité de racines
- Un polynôme de degré $n \geqslant 1$ possède $n$ racines comptées avec leurs multiplicités
- Si un polynôme de degré au plus $n$ possèdent $n+1$ racines distinctes alors c'est le polynôme nul
- Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $I$. On a l'équivalence

$$\int_I f(t)dt = 0 \Longleftrightarrow f \text{ est identiquement nulle sur } I$$

- Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. On a l'équivalence

### exemple 4: très important: produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Pour tous $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, on pose

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Alors, $< , >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. C'est celui que l'on utilise usuellement.

*Notamment:*

1. *sur* $E = \mathbb{R}^2$, *le p.s.u. est* $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1 y_1 + x_2 y_2$

2. *sur* $E = \mathbb{R}^3$, *le p.s.u. est* $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

R*emarque:*

– *il est d'usage d'identifier* $\mathbb{R}^n$ *et l'espace des matrices unicolonnes correspondant, c'est à dire que l'on identifiera le vecteur* $(1,2,3)$ *et la matrice* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

– *de même il est d'usage d'identifier l'ensemble des matrices monocoefficients* $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *à* $\mathbb{R}$, *c'est à dire que l'on identifiera la matrice* $(4)$ *avec le réel* $4$

– *avec ces usages, on peut alors écrire avec le produit scalaire usuel*

$$< (1,2,3), (2,-1,1) >= 3 = (3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### exemple 5: un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Même si l'on travaille le plus souvent avec le produit scalaire usuel, il est possible de munir l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ d'autres produits scalaires!
Par exemple, il est aisé de vérifier que l'application ci-dessous est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$!

$$\boxed{\begin{array}{llll} < , >: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2)) & \longmapsto & x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 \end{array}}$$

Pour ce produit scalaire, le monde a une autre allure!
En effet, les vecteurs $(1,-1)$ et $(1,1)$ ne sont plus orthogonaux mais $(1,-1)$ et $(2,1)$ le sont!

### exemple 6:

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
Pour tous polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $< P, Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$

1. Montrer que $< , >$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$
2. Montrer que $< , >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$
3. Déterminer l'ensemble des polynômes $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifient $< P, X^2 - X >= 0$.
   Cet ensemble est-il un sev? et si oui de quelle dimension?

### exemple 7: un exemple juste destiné à revoir une formule!

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
Pour tous polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $< P, Q >= \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$
Justifier que $< , >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

### exemple 8: produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (à savoir refaire)

Pour toutes matrices $A$ et $B$ de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\phi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tA.B)$

1. Montrer que $\phi$ est bilinéaire et symétrique
2. Montrer que $\phi(A,A) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$
3. En déduire que $\phi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
4. Déterminer l'ensemble des matrices qui sont orthogonales à la matrice identité.
   Vérifier qu'il s'agit d'un sev. Quelle est sa dimension?

`demonstration:`

1. – *Soient* $(A,B) \in E^2$.
   *On a* $\phi(B,A) = \mathrm{tr}({}^tBA)$. *Or* $\mathrm{tr}({}^tM) = \mathrm{tr}(M)$ *et* ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$ *et* ${}^t({}^t(M)) = M$),
   *d'o* $\phi(B,A) = \mathrm{tr}({}^t({}^tBA)) = \mathrm{tr}({}^tA^t({}^tB)) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \phi(AB)$
   *donc* $\phi$ *est symétrique.*
   – *Soient* $(A,B,C) \in E^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
   *Gr à la linéarité de l'application trace, on peut écrire ce qui suit:*
   $\phi(A,\lambda B + C) = \mathrm{tr}({}^tA(\lambda B + C)) = \mathrm{tr}(\lambda^tAB + {}^tAC) = \lambda\,\mathrm{tr}({}^tAB) + \mathrm{tr}({}^tAC) = \lambda\phi(A,B) + \phi(A,C)$
   *donc* $\phi$ *est linéaire à droite*
   – *Comme* $\phi$ *est symétrique et linéaire à droite, on peut affirmer que* $\phi$ *est bilinéaire*
2. *Soit* $A = (a_{ij}) \in E$.
   *Notons* $B = {}^tA = (b_{ij})$ *et* $C = {}^tAA = (c_{ij})$. *On a* $b_{ij} = a_{ji}$
   *D'après la formule du produit matriciel,*
   *on a* $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$ *et donc* $\mathrm{tr}(C) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}^2$.
   *On trouve bien la formule annoncée:* $\mathrm{tr}({}^tAA)$ *est égale à la somme des carrés des coefficients de la matrice* $A$.
3. – $\phi$ *est clairement positive*
   *La formule précédente montre que* $\phi(A,A)$ *est la somme de carrés de nombres réels, c'est donc la somme de nombres postifs ou nuls, c'est un nombre positif ou nul.*
   – $\phi$ *est définie*
   *Soit* $A \in E$ *tel que* $\phi(A,A) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0$. *On sait qu'une somme de termes positifs est nulle ssi chacun des termes est nul, c'est à dire ici* $\forall i, \forall k, a_{ki}^2 = 0$, *c'est à dire ssi tous les coefficients de* $A$ *sont nuls, donc* $A = 0$

### exemple 9: à traiter une fois le chapitre achevé

On considère l'espace euclidien ci-dessus $(E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\phi)$
On note $\mathcal{A}_n$ [resp. $\mathcal{S}_n$] l'espace vectoriel des matrice antisymétriques [resp. symétriques] d'ordre $n$

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ et que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont orthogonaux
2. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice $B \in E$ sur l'espace $\mathcal{S}_n$
   *Application: cas où* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
3. Montrer que $d(B,\mathcal{S}_n) = \dfrac{1}{2}||B -^t B||$ pour tout $B \in E$

## 1.2 norme

**définition 4: norme (H.P.)**

Soit $N$ une application de $E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
On dit que $N$ est une norme sur $E$ lorsque :

i) $\forall \vec{x} \in E, N(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
ii) $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda \vec{x}) = |\lambda|.N(\vec{x})$
iii) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, N(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{y})$

*une norme n'est pas une application linéaire...*

**théorème 2: à démontrer après l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel.
L'application $\boxed{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \vec{x} & \longmapsto & \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>} \end{array}}$ est une norme sur $E$.

**définition 5: norme associée au produit scalaire, norme préhilbertienne**

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel.
On appelle norme associée au produit scalaire, et on note $||.||$, l'application définie sur $E$ par

$$\boxed{\forall \vec{x} \in E, ||\vec{x}|| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}}$$

- $||\vec{x}-\vec{y}||$ *s'interprète alors comme la distance entre* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$,
- *et on appelle* *distance associée au produit scalaire* $<\,,\,>$ *l'application* $\boxed{\begin{array}{cccc} d: & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & ||\vec{x}-\vec{y}|| \end{array}}$

**théorème 3: relations entre produit scalaire et norme**

$<\,,\,>$ étant un produit scalaire sur $E$, et $||.||$ désignant la norme associée, on a :

i) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2 <\vec{x},\vec{y}>$
ii) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2 <\vec{x},\vec{y}>$
iii) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}+\vec{y}||^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = 2(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2)$ (identité du parallélogramme)
iv) $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, ||\vec{x}+\vec{y}||^2 - ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = 4 <\vec{x},\vec{y}>$ (identité de polarisation)

**théorème 4: Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace préhilbertien réel.
On a alors :

$$\boxed{\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2, |<\vec{x},\vec{y}>| \leqslant \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}.\sqrt{<\vec{y},\vec{y}>} = ||\vec{x}||.||\vec{y}||}$$

avec égalité ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont liés.

*la valeur absolue du produit scalaire est majorée par le produit des normes et il y a égalités uniquement lorsque les vecteurs sont colinéaires*

**démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

1. **Dans** $\boxed{\text{le cas où } \vec{y}=\vec{0}}$**,**
   **justifier que pour tout vecteur $\vec{x}$ on a** $| < \vec{x},\vec{y} > | = ||\vec{x}||.||\vec{y}||$
   Si $\vec{y}=\vec{0}$ et si $\vec{x}$ est un vecteur de $E$, on sait que $||\vec{y}|| = 0$ et que $< \vec{x},\vec{y} >= 0$.
   On a donc bien l'égalité indiquée.
   (et la famille $(\vec{x},\vec{y})$ est liée car une famille qui contient le vecteur nul est toujours liée)
2. **On se place dans** $\boxed{\text{le cas où } \vec{y}\neq\vec{0}}$ **et $\vec{x}\in E$ quelconque fixés**
   **On considère pout tout** $\lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = ||\vec{x}+\lambda\vec{y}||^2$
   (a) **Montrer que $P$ est un polynôme de degré exactement deux à coefficients réels**
   En utilisant le bilinéarité du produit scalaire,
   pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $P(\lambda) = ||\vec{y}||^2.\lambda^2 + 2 < \vec{x},\vec{y} > .\lambda + ||\vec{x}||^2$
   Comme $\vec{y} \neq 0$, on a $||\vec{y}|| \neq 0$ , et donc $P$ est bien un polynôme de degré exactement deux à coefficients réels.

   (b) **Justifier que le discriminant de $P$ est inférieur ou égal à zéro,**
   **et en déduire que** $| < \vec{x},\vec{y} > | \leqslant ||\vec{x}||.||\vec{y}||$
   On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, ||\vec{x}+\lambda\vec{y}||^2 \geqslant 0$, c'est à dire que le polynôme $P$ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$: on sait que cela signifie que $\Delta \leqslant 0$.
   Or $\Delta = 4(< \vec{x},\vec{y} >^2 - ||\vec{x}||^2.||\vec{y}||^2)$ (!)
   On a donc prouvé que $< \vec{x},\vec{y} >^2 \leqslant ||\vec{x}||^2.||\vec{y}||^2$,
   ce qui équivaut en composant par la fonction racine carrée qui est croissante à

$$\boxed{| < \vec{x},\vec{y} > | \leqslant ||\vec{x}||.||\vec{y}||}$$

   (c) **Montrer que** $| < \vec{x},\vec{y} > | = ||\vec{x}||.||\vec{y}||$ **ssi $(\vec{x},\vec{y})$ est une famille liée**
   En utilisant la question précédente, on peut écrire les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} | < \vec{x},\vec{y} > | = ||\vec{x}||.||\vec{y}|| &\iff \Delta = 0 \\ &\iff \exists\,!\lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = 0 \\ &\iff \exists\,!\lambda \in \mathbb{R}, ||\vec{x}+\lambda.\vec{y}|| = \vec{0} \\ &\iff \exists\,!\lambda \in \mathbb{R}, \vec{x}+\lambda.\vec{y} = \vec{0} \\ &\iff (\vec{x},\vec{y}) \text{ est une famille liée} \end{aligned}$$

*remarque:*
*On a vu dans le chapitre "Algèbre liénaire" que l'on avait l'équivalence*

$$(\vec{x},\vec{y}) \text{ est une famille liée } \iff (\vec{y}=\vec{0} \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{K}, \vec{x} = \lambda.\vec{y})$$

**démonstration du théorème 2**

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux éléments de $E$, et $\lambda$ un réel.

i) $||\vec{x}|| = 0 \iff < \vec{x},\vec{x} >= 0 \iff \vec{x} = 0$

ii) $||\lambda\vec{x}|| = \sqrt{< \lambda\vec{x},\lambda\vec{x} >} = \sqrt{\lambda^2 < \vec{x},\vec{x} >} = |\lambda|\sqrt{< \vec{x},\vec{x} >} = |\lambda|.||\vec{x}||$

iii)

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||^2 &= ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2 < \vec{x},\vec{y} > \\ &\leqslant ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2||\vec{x}||.||\vec{y}|| = (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2 \end{aligned}$$

et comme la fonction $\sqrt{}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ cela donne bien $||\vec{x}+\vec{y}|| \leqslant ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$

**exemple 10:**

On note $E=\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

1. Justifier que l'application ci-dessus définit bien un produit scalaire sur $E$
2. En déduire que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ on a $\int_0^1 P(t)dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 P^2(t)dt}$

**exemple 11:**

1. Montrer que pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, on a donc $|ab-cd|\leqslant\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$
2. Montrer que pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $(x+2y+3z+4t)^2\leqslant 30(x^2+y^2+z^2+t^2)$
3. Montrer que pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{tr}(A)|\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}({}^tAA)}$
4. Montrer que pour toute fonction $f$ continue sur le segment $[a,b]$, on a $|\int_a^b f|\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f^2}$

## 2 Orthogonalité

Dans ce paragraphe, on considérera donné un espace préhilbertien réel $(E,<\,,\,>)$.

**définition 6:**

i) On dit que les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux lorsque $<\vec{x},\vec{y}>=0$

ii) On dit que les sous-espaces $F$ et $G$ de $E$ sont orthogonaux lorsque $\forall(\vec{x},\vec{y})\in F\times G, <\vec{x},\vec{y}>=0$

**exemple 12: des exemples dans $\mathbb{R}^3$**

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1. les plans $\operatorname{vect}(\vec{i},\vec{j})$ et $\operatorname{vect}(\vec{j},\vec{k})$ sont-ils orthogonaux?
2. Combien y a t il de droites orthogonales à la droite $\Delta=\operatorname{vect}(\vec{i}+\vec{j})$? Les déterminer toutes!
3. $a$ désigne un paramètre réel.
   On considère la droite $D=\operatorname{vect}(\vec{i}+a\vec{j}+\vec{k})$ et le plan $P=\operatorname{vect}(\vec{i}+\vec{j},a\vec{j}-\vec{k})$
   Déterminer $a$ pour que $D$ et $P$ soient orthogonaux.

**exemple 13: avec le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'exemple 8**

1. Dans le cas o $n=2$, déterminer les matrices $B$ qui sont orthogonales à $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$
2. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sont deux sev orthogonaux.

**exemple 14: dans un espace de fonctions, qui formalise les séries de Fourier**

Soit $E=C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $<f,g>=\int_{[0,2\pi]}fg$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $f_n:t\mapsto\cos(nt)$
Montrer la famille $(f_p)_{p\geqslant 0}$ est une famille de vecteurs orthogonaux deux à deux.

**théorème 5:**

Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les autres

**théorème 6: une nouvelle manière de justifier que deux sev sont en somme directe!**

**Si** $F$ et $G$ sont deux sous-espaces orthogonaux **alors** ils sont en somme directe (càd $F\cap G=\{\vec{0}\}$)

**théorème 7:**

Soient $F = \text{vect}(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ et $G = \text{vect}(\overrightarrow{y_1}, \ldots, \overrightarrow{y_p})$. **Alors** :

i) un vecteur $\vec{y}$ est orthogonal à tout vecteur de $F$ ssi $\vec{y}$ est orthogonal à une famille génératrice de $F$

$$\boxed{\vec{y} \text{ est orthogonal à tout vecteur de } F (\text{càd } \vec{y} \in F^{\perp}) \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \ < \vec{y},\vec{x}_i >= 0}$$

ii)

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], \ < \vec{x}_i,\vec{y}_j >= 0}$$

càd: deux sev sont orthogonaux ssi leurs familles génératrices sont orthogonales

*exemples:*

*Pour vérifier que deux droites sont orthogonales, il suffit de vérifier que leurs vecteurs directeurs le sont.*

*Pour vérifier que la droite* $D = \text{vect}(\vec{x}_1)$ *et le plan* $P = \text{vect}(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$ *sont orthogonaux, il suffit de vérifier que* $< \vec{x}_1,\vec{y}_1 >=< \vec{x}_1,\vec{y}_2 >= 0$

**méthode 2: comment montrer que deux sev sont orthogonaux**

Il suffit de vérifier que leurs familles génératrices sont orthogonales.

*Exemple:*

*Dans* $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel, on considère les deux sev*

$$F = \text{vect}((1,0,0,-1),(-4,2,3,0)) \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} -4x + 2y + 3z & = 0 \\ -3x + 2y + 3z - t & = 0 \end{cases} \}$$

*1. Montrer qu'ils sont orthogonaux.*

*2. Définir* $G$ *... d'une autre manière mais identique*

**définition 7: famille orthogonale ou orthonormale**

Soit $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de $E$.

i) On dit que $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est <u>une famille orthogonale</u> lorsque $\forall i \neq j, \ < \vec{x}_i,\vec{x}_j >= 0$

ii) On dit que $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est <u>une famille orthonormale</u> lorsque $\forall i,j, \ < \vec{x}_i,\vec{x}_j >= \delta_{ij}$
*càd qu'une famille orthonormale est une famille orthogonale de vecteurs unitaires*

**exemple 15: exemples importants**

i) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel

ii) La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une famille orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'exemple 8

*démonstration de ii)*

Notons $E_{ij}$ la matrice élémentaire d'indice $(i,j)$

- On a vu que $E_{ji}.E_{kl} =$

- On a donc toujours $< E_{ij},E_{kl} >= 0$ car

**théorème 8: une nouvelle manière de justifier qu'une famille est libre**

i) Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est une famille libre.
ii) Une famille orthonormale est une famille libre.

**théorème 9: théorème de Pythagore**

**Si** $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$ est une famille orthogonale **alors** $||\vec{x}_1+\dots+\vec{x}_n||^2=||x_1||^2+\dots+||x_n||^2=\sum_{i=1}^{n}||\vec{x}_i||^2$

*Dans le cas particulier où $n=2$ on a le résultat plus précis:*

$$\boxed{\vec{x}_1 \text{ et } \vec{x}_2 \text{ sont orthogonaux} \iff ||\vec{x}_1+\vec{x}_2||^2=||\vec{x}_1||^2+||\vec{x}_2||^2}$$

**définition 8: orthogonal d'un sev**

Soit $F$ un sev de $E$.
On appelle sev orthogonal de $F$ l'ensemble des vecteurs de $E$ qui sont orthogonaux à tout vecteur de $F$.
On le note $F^\perp$.

$$\boxed{F^\perp=\{\vec{x}\in E|\forall\vec{a}\in F, <\vec{x},\vec{a}>=0\}}$$

*rem: on l'appelle sev orthogonal de $F$ car c'est effectivement un sev (à démontrer)!*

**méthode 3: comment déterminer l'orthogonal d'un sev $F$**

Si $F=\text{vect}(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})$, on a $F^\perp=\{\vec{x}\in E|\forall i\in[\![1,n]\!],\ <\vec{x},\vec{x}_i>=0\}$

C'est toujours la même idée: il suffit de déterminer les vecteurs qui sont orthogonaux à une famille génératrice de $F$

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthogonal de la droite dirigée par $(1,2,-1)$
2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'orthogonal de $F:\begin{cases}x+y-z+t&=0\\x+2z+2t&=0\end{cases}$

**exemple 16:**

Soient $F$ et $G$ deux sev de l'espace préhilbertien $(E,<\ ,\ >)$.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

i) $\forall\vec{x}\in F,\forall\vec{y}\in G,\ <\vec{x},\vec{y}>=0$
ii) $F$ et $G$ sont orthogonaux
iii) $F\subset G^\perp$
iv) $G\subset F^\perp$

Mais qu'elles ne sont pas équivalente à $v)\ F^\perp=G$

**exemple 17:**

Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\phi(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$.
On considère $F=\{f\in E|f(0)=0\}$

1. Soit $f\in F^\perp$
   (a) Que peut-on dire de la fonction $g:t\mapsto tf(t)$?
   (b) Montrer que $\forall t\in]0,1], f(t)=0$ puis que $f=0$
2. Que vaut $F^\perp$?
3. En déduire $(F^\perp)^\perp$

**théorème 10:**

Soient $F$ et $G$ deux sev d'un espace préhilbertien $(E, < , >)$.

i) **Si** $F \subset G$ **alors** $G^\perp \subset F^\perp$

ii) $F \subset (F^\perp)^\perp$

**exemple 18:**

Soient $F_1$ et $F_2$ deux sev. Montrer que:

1. $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$
2. $F_1^\perp + F_2^\perp \subset (F_1 \cap F_2)^\perp$

## 3 Bases orthonormales, projection orthogonale

**théorème 11: procédé d'orthonormalisation de Schmidt**

Soit $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_p})$ une <u>famille libre</u> de $p$ vecteurs de $E$.
**Alors** , il existe une et une seule famille orthonormale $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ telle que:

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \begin{cases} \mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}) = \mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_k}) \\ < \vec{x}_k, \vec{e}_k >> 0 \end{cases}$$

*Les vecteurs* $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ *sont définis successivement par les formules*

- *on pose* $\boxed{\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{x}_1}{||\vec{x}_1||}}$
- *et l'on construit de proche en proche* $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots \vec{e}_n$ *avec la formule :*

$$\forall k \in [\![2,p]\!], \boxed{\vec{e}_k = \frac{\vec{x}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} < \vec{x}_k, \vec{e}_i > \vec{e}_i}{||\vec{x}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} < \vec{x}_k, \vec{e}_i > \vec{e}_i||} = \frac{\vec{x}_k - p_{F_{k-1}}(\vec{x}_k)}{||\vec{x}_k - p_{F_{k-1}}(\vec{x}_k)||}}$$

*o* $F_k = \mathrm{vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}) = \mathrm{vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_k})$ *et* $p_{F_k}$ *désigne la projection orthogonale sur* $F_k$

- L'idée du procédé est la suivante:
  - on norme $\vec{x}_1$ pour obtenir un vecteur unitaire $\vec{e}_1$
  - on retranche à $\vec{x}_2$ sa composante suivant $\vec{e}_1$ puis on norme le vecteur ainsi obtenu.
  - on retranche à $\vec{x}_3$ sa composante suivant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ puis on norme le vecteur ainsi obtenu.

**exemple 19: dans $\mathbb{R}^2$ muni du ps usuel**

Sans calcul, dessiner et donner la famille orthonormale issue du procédé de Schmidt à partir de la famille libre $(\vec{i}+\vec{j},2\vec{i})$

**exemple 20: dans $\mathbb{R}^3$ muni du ps usuel**

Sans calcul, dessiner et donner la famille orthonormale issue du procédé de Schmidt à partir de la famille libre $(\vec{i}+\vec{j},2\vec{i},\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k})$

**exemple 21: géométrie dans l'espace**

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=(\vec{i}+\vec{k},-2\vec{i}+3\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

**exemple 22:**

$E=\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$
Considérons la famille libre suivante $(1,X,X^2,X^3)$. La famille orthonormale obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est:

$$(1,\sqrt{3}(2X-1),\sqrt{5}(6X^2-6X+1),\sqrt{7}(20X^3-30X^2+12X-1))$$

**théorème 12: expression des coordonnées dans une bon**

Soit $(E,<\ ,\ >)$ un espace euclidien.
Alors:

i) $E$ possède une base orthonormée *(il n'y a pas unicité)*
ii) Soit $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n})$ une base orthonormale de $E$.
On a la formule

$$\boxed{\forall \vec{x}\in E, \vec{x}=<\vec{x},\vec{e}_1>\vec{e}_1+\cdots+<\vec{x},\vec{e}_n>\vec{e}_n=\sum_{i=1}^{n}<\vec{x},\vec{e}_i>\vec{e}_i}$$

**démonstration:**

i) Il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à n'importe quelle base de $E$ pour obtenir une bon.
ii) Notons $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées de $\vec{x}$ dans la bon $\mathcal{B}$.
On a ainsi $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\ldots x_n\vec{e}_n$
Soit $i\in[\![1,n]\!]$ fixé.
On a $<\vec{x},\vec{e}_i>=<\sum_{k=1}^{n}x_k\vec{e}_k,\vec{e}_i>=\sum_{k=1}^{n}x_k\underbrace{<\vec{e}_k,\vec{e}_i>}_{\delta_{ik}}=x_i$

**exemple 23: bases orthonormées classiques**

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une bon pour le ps usuel (on dit encore produit scalaire canonique)
- La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une bon pour le ps $<\ ,\ >$: $(A,B)\mapsto \mathrm{tr}(A^T.B)$

**théorème 13:**
Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace préhilbertien et soit $F$ un sev de dimension finie de $E$.
Alors $F \oplus F^{\perp} = E$

**démonstration:**
Soit $F$ un sev de dimension finie de $E$
Notons $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ une bon de $F$
Nous allons montrer par Analyse-Synthèse que $\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{y},\vec{z}) \in F \times F^{\perp}, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
**Partie Analyse:**
Soit $\vec{x} \in E$. On suppose qu'il existe $(\vec{y},\vec{z}) \in F \times F^{\perp}, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ on a

$$< \vec{x},\vec{e}_i > = < \vec{y}+\vec{z},\vec{e}_i > = < \vec{y},\vec{e}_i > + < \underbrace{\vec{z}}_{F^{\perp}}, \underbrace{\vec{e}_i}_{F} > = < \vec{y},\vec{e}_i > + 0 = < \vec{y},\vec{e}_i >$$

Comme $\mathcal{B}$ est une bon, on sait d'après le théorème que $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{p} < \vec{y},\vec{e}_i > \vec{e}_i$, on en déduit que

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{z} = \vec{x} - \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i$$

**Partie Synthèse:**
Nous allons vérifier que:

i) $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i$ est un élément de $F$
ii) $\vec{z} = \vec{x} - \sum\limits_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i$ est un élément de $F^{\perp}$
iii) $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$

i) $\vec{y}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p$. Ainsi $\vec{y} \in \text{vect}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p) = F$
ii) Pour vérifier que $\vec{z} \in F^{\perp}$ nous allons vérifier que $\vec{z}$ est orthogonal à une famille génératrice de $F$, en l'occurrence ici la famille $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$.
Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a

$$< \vec{z},\vec{e}_k > = < \vec{x} - \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > \vec{e}_i,\vec{e}_k > = < \vec{x},\vec{e}_k > - \sum_{i=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_i > < \vec{e}_i,\vec{e}_k >$$

Or $< \vec{e}_i,\vec{e}_k > = \delta_{ik}$ et donc dans la somme ci-dessus ne reste que le terme d'indice $k$, d'òu

$$< \vec{z},\vec{e}_k > = < \vec{x},\vec{e}_k > - < \vec{x},\vec{e}_k > \underbrace{< \vec{e}_k,\vec{e}_k >}_{=1} = 0$$

iii) trivial!

**théorème 14:**
Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace préhilbertien et soit $F$ un sev de dimension finie de $E$.
L'application $\boxed{\begin{array}{rcl} p_F : E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & < \vec{x},\vec{e}_1 > \vec{e}_1 + \cdots + < \vec{x},\vec{e}_p > \vec{e}_p \end{array}}$
est la projection sur $F$ parallèlement à $F^{\perp}$, càd la projection orthogonale sur $F$
*C'est à dire l'endomorphisme de $E$ qui à $\vec{x} \in E = F \oplus F^{\perp}$ associe $\vec{y} \in F$ tel que $\vec{x} - \vec{y} \in F^{\perp}$*
*rem: son noyau est $F^{\perp}$ et son image est $F$*

**remarque 2 ( *formule du projeté orthogonal*)**

*Le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{x}$ sur $F$ est donné par les formules:*

*i) lorsque $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ est une base orthonormale de $F$.*

$$\boxed{p_F(\vec{x}) =< \vec{x},\vec{e}_1 > \vec{e}_1 + \cdots + < \vec{x},\vec{e}_p > \vec{e}_p = \sum_{k=1}^{p} < \vec{x},\vec{e}_k > \vec{e}_k}$$

*ii) lorsque $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ est une base orthogonale de $F$.*

$$\boxed{p_F(\vec{x}) = \frac{< \vec{x},\vec{e}_1 >}{||\vec{e}_1||^2}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{< \vec{x},\vec{e}_p >}{||\vec{e}_p||^2}\vec{e}_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{< \vec{x},\vec{e}_k >}{||\vec{e}_k||^2}\vec{e}_k}$$

**exemple 24: Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu**

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu, on considère le plan $F = \mathrm{vect}(\vec{i} - \vec{j},\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.
Donner l'expression de la projection orthogonale sur $F$ puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à $F$, pour tout $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$

**méthode 4: comment déterminer un projeté orthogonal**

1. *ou bien on cherche une base orthonormée de $F$ et on applique la formule de la remarque 2*
2. *ou bien on écrit $p_F(\vec{x})$ comme une combinaison linéaire d'une base (pas forcément orthonormée) de $F$ puis on caractérise le fait que $\vec{x} - p_F(\vec{x})$ est orthogonal à $F$*

Exemple:
Soit $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\phi(f,g) = \int_{[-1,1]} fg$.
On note $F$ le sev de $E$ constitué des fonctions polynomiales de degré au plus 2.
Pour tout $i \in \{0,1,2\}$, on note $\boxed{\begin{array}{rcl} f_i : [-1,+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^i \end{array}}$. La famille $(f_0,f_1,f_2)$ est une base de $F$
Déterminer le projeté orthogonal de $\boxed{\begin{array}{rcl} g : [-1,+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(t) \end{array}}$ sur $F$.

1. Ici il est facile de constater que $< f_0,f_1 >=< f_1,f_2 >= 0 \neq < f_0,f_2 >$.
   Nous allons normer $f_0$ et $f_1$ puis utiliser l'idée du procédé de Schmidt pour trouver notre dernier vecteur
   $$e_0 = \frac{f_0}{||f_0||} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad e_1 = \frac{f_1}{||f_1||} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}f_1$$
   et ensuite on calcule
2. notons $p_F(g) = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. On a les équivalences suivantes
   $$\begin{aligned} g - p_F(g) \in F^\perp &\iff \forall i \in \{0,1,2\},\ < g - p_F(g),f_i >= 0 \\ &\iff \forall i \in \{0,1,2\}, \int_{[-1,+1]} (g - (\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)).f_i = 0 \\ &\iff \begin{cases} \int_{-1}^{1} (\sin(t) - \lambda_0 - \lambda_1 t - \lambda_2 t^2).1dt & = 0 \\ \int_{-1}^{1} (\sin(t) - \lambda_0 - \lambda_1 t - \lambda_2 t^2).tdt & = 0 \\ \int_{-1}^{1} (\sin(t) - \lambda_0 - \lambda_1 t - \lambda_2 t^2).t^2dt & = 0 \end{cases} \\ &\iff \cdots \iff \begin{cases} \lambda_0 = \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 & = 3(\sin 1 - \cos 1) \end{cases} \end{aligned}$$

**théorème 15: inégalité de Bessel**
Soit $(E,<\,,\,>)$ un epr et $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ une famille orthonormée.
Pour tout vecteur $\vec{x}$ de $E$, on a $\sum\limits_{i=1}^{p} <\vec{e}_i,\vec{x}>^2 \leqslant ||\vec{x}||^2$

## 4 Cas particulier d'un espace euclidien

Un espace euclidien étant un espace de dimension finie, tous ses sev sont également de dimension finie. On a ainsi:

**théorème 16:**
Soit $(E,<\,,\,>)$ un espace euclidien et $F$ un sev de $E$. On a :
i) $F \oplus F^{\perp} = E$
ii) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$
iii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$
*dans $\mathbb{R}^2$, l'orthogonal d'une droite est un droite*
*dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'une droite est un plan, et réciproquement*

**exemple 25: très important**
L'orthogonal d'une droite est un hyperplan et réciproquement.
Plus précisément, si $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ désigne une base orthonormée de $E$.
L'orthogonal de la droite dirigée par le vecteur $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ est l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ et réciproquement.

**exemple 26:**
Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, et $F$ le plan d'équation $x - y + z = 0$
Déterminer la matrice, dans la base canonique de $E$, de la projection orthogonale sur $F$. (on pourra s'intéresser à la projection sur $F^{\perp}$

**exemple 27:**
On considère $\mathbb{R}^4$ muni du psu. On note $(\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{l})$ sa base canonique.
On considère $F = \text{vect}(\vec{i}+\vec{j},\vec{k}-\vec{l})$ et $\vec{x} = (1,2,3,4) = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + 4\vec{l}$

1. Déterminer le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $F$ ainsi que son symétrique orthogonal par rapport à $F$
2. Déterminer une bon de $F^{\perp}$

**remarque 3 (*projection orthogonale, symétrie orthogonale*)**
*On sait que l'on a les propriétés suivantes:*

1. *si $\mathcal{B}$ est une base de $F$ et $\mathcal{B}'$ est une base de $F^{\perp}$ alors la concaténation $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'$ est une base de $E$*
2. *si $\mathcal{B}$ est une bon de $F$ et $\mathcal{B}'$ est une bon de $F^{\perp}$ alors la concaténation $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'$ est une bon de $E$*
3. *la projection orthogonale sur $F$ est l'application* $\boxed{\begin{array}{rcl} p : E = F\oplus F^{\perp} & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & \vec{x}_1 \end{array}}$

   *sa matrice dans la base adaptée $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $diag(1,\dots,1,0,\dots,0)$*
4. *la symétrie orthogonale par rapport à $F$ est l'application* $\boxed{\begin{array}{rcl} s : E = F\oplus F^{\perp} & \longrightarrow & E \\ \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \end{array}}$

   *sa matrice dans la base adaptée $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}'$ est la matrice diagonale $diag(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$*

### méthode 5: expression intrinsèque d'une réflexion

Par définition, <u>une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.</u>
( Elles sont particulièrement importantes en mathématiques.)

Soit $H$ **un hyperplan** de $E$. On note $D = \text{vect}\,\overrightarrow{a} = H^{\perp}$

i) la projection orthogonale sur $D$ a pour expression $\boxed{p_D(\vec{x}) = \dfrac{< \vec{x},\vec{a} >}{||\vec{a}||^2}\vec{a}}$

ii) la projection orthogonale sur $H$ a pour expression $\boxed{p_H(\vec{x}) = \vec{x} - \dfrac{< \vec{x},\vec{a} >}{||\vec{a}||^2}\vec{a}}$

iii) la symétrie orthogonale par rapport à $H$ a pour expression $\boxed{s_H(\vec{x}) = \vec{x} - 2\dfrac{< \vec{x},\vec{a} >}{||\vec{a}||^2}\vec{a}}$

*lorsque l'on fait un dessin pour exprimer ces résultats on choisit quasiment toujours de se placer dans* $\mathbb{R}^3$ *avec une droite et un plan*

### exemple 28:

Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une bon.
On considère un vecteur non nul $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$.
On note $D$ la droite dirigée par $\vec{a}$ et $f$ la projection orthogonale sur $D$.

1. Calculer $f(\vec{e}_j)$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$
2. En déduire la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

   Comment pourrait-on simplement l'écrire à l'aide de la matrice unicolonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ?

# 5 Distance

**définition 9: distance entre un vecteur et un sev**

Soit $\vec{x}$ un vecteur de $E$.
On appelle distance de $\vec{x}$ à $F$, et on note $d(\vec{x},F)$, le nombre réel positif suivant :

$$\boxed{d(\vec{x},F) = \inf_{\vec{y}\in F} d(\vec{x},\vec{y}) = \inf_{\vec{y}\in F} ||\vec{x}-\vec{y}|| = \inf\{d(\vec{x},\vec{y}) \,|\, \vec{y}\in F\}}$$

*L'ensemble $\{d(\vec{x},\vec{y}) \,|\, \vec{y}\in F\}$ est un ensemble de nombres positifs ou nuls; c'est ainsi un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$. Il est forcément minorée(par zéro déjà) et possède une borne inférieure*
*On rappelle que la borne inférieure d'un ensemble est le plus grand des minorants*

**théorème 17: très important: distance à un sev de dimension finie**

Soit $F$ un sev de dimension finie de $E$. **Alors** :

i) $\forall \vec{x}\in E$ , $\exists\,!\ \vec{y_0}\in F, d(\vec{x},F) = d(\vec{x},\vec{y_0})$
ii) et de plus, ce vecteur $\vec{y_0}$ n'est autre que le projeté orthogonal de $\vec{x_0}$ sur $F$.

- *"la distance entre un vecteur $\vec{x}$ et un sev de dim. finie $F$ est obtenue pour le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $F$, et uniquement pour celui-ci "*
- *le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $F$ est l'unique élément de $F$ qui minimise la distance de $\vec{x}$ à un vecteur de $F$*
- *on a* $\boxed{d(\vec{x},F) = d(\vec{x},\vec{y_0}) = ||\vec{x}-\vec{y_0}||}$ *et* $\boxed{||\vec{x}-\vec{y_0}||^2 = ||\vec{x}||^2 - ||\vec{y_0}||^2}$

**exemple 29:**

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du psu, le projeté orthogonal
du vecteur $\vec{x} = (4,2,1)$ sur le plan $F$ d'équation $x+y=0$
est le vecteur $\vec{y_0} = (1,-1,1)$.

On en déduit que la distance entre le
vecteur $(4,2,1)$ et le plan $P$
vaut $||(4,2,1)-(1,-1,1)|| = ||(3,3,0)|| = 3\sqrt{2}$

**exemple 30:**

On considère le système linéaire $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{cases}$ d'inconnues scalaires réelles $x$ et $y$.
Après une brève étude(!), on constate que ce système ne possède pas de solution.
Cependant, faute de mieux, on nous presse de donner un couple $(x,y)$ qui ferait "le mieux l'affaire".
(Intuitivement, on comprend que le couple $(10,15)$ fait "moins bien l'affaire" que le couple $(1,0)$)

1. Représenter l'ensemble des vecteurs $(x+y,x+y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ainsi que le vecteur $(1,2)$
2. En déduire l'ensemble des couples $(x,y)$ qui "font le mieux l'affaire!"

**exemple 31:**

Soit $a$ un paramètre réel. On considère le système $(S)$ : $\begin{cases} x+y &= 4 \\ -x-y &= a \\ x-z &= 1 \end{cases}$

1. Montrer que le système $(S)$ est compatible ssi $\begin{pmatrix}4\\a\\1\end{pmatrix} \in \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \text{vect}(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$
2. On suppose que $a=2$, on souhaite fournir une solution approchée du système.
   (a) Quel est le projeté orthogonal du vecteur $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ sur le plan $\text{vect}(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$ ? (cf. exemple 29 )
   (b) En déduire les solutions approchées du système. Combien en existe-t-il?

**exemple 32:**

Déterminer $\inf_{t\in\mathbb{R}}\{\sqrt{(1-t)^2+(2-t)^2}\}$

*Considérons $E=\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. La question posée se traduit alors par :*

Déterminer $\inf_{t\in\mathbb{R}}\{||(1,2)-t(1,1)||\} = \inf_{Y\in F}\{||(1,2)-Y||\}$ avec $F=\text{vect}(1,1)=\{(t,t)|t\in\mathbb{R}\}$

*D'après les théorèmes précédents, on peut affirmer qu'il existe un unique $Y_0\in F$ tel que $||(1,2)-Y_0|| = \inf_{Y\in F}||(1,2)-Y||$, et que $Y_0$ n'est autre que le projeté orthogonal de $(1,2)$ sur $F$.*

*C'est à dire que* $Y_0 = \dfrac{<(1,2),(1,1)>}{||(1,1)||^2}.(1,1) = \frac{3}{2}.(1,1) = (\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

*D'où la valeur cherchée* $||(1,2)-Y_0|| = \big(||(1,2)||^2 - ||Y_0||^2\big)^{(1/2)} = \sqrt{5-\dfrac{9}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**exemple 33:**

Montrer avec soin que si $F_1\subset F_2$ sont deux sev de $E$ alors $d(x_0,F_1)\geqslant d(x_0,F_2)$

**exemple 34: on pourra penser à un exemple précédent...**

Pour tous $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ on note $f(a,b,c)=\int_{[-1,1]}(\sin(t)-a-bt-ct^2)^2dt$

1. Interpréter $f(a,b,c)$ en terme de distance
2. Justifier que le minimum de $f(a,b,c)$ est $\int_{-1}^{1}\sin^2(t)dt - 6(\sin 1-\cos 1)^2$.
   Pour quelle(s) valeur(s) est-il obtenu?

**exemple 35: deux questions semblables mais très différentes**

1. Déterminer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\big((2-x-y)^2+(3-2x-y)^2\big)^{1/2}$
2. Déterminer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\big((1-x+y)^2+(2-y)^2+(3-2x-y)^2\big)^{1/2}$

**exemple 36:**

Déterminer $\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\sqrt{\int_0^{\pi}(t-\lambda\cos t)^2dt}$

A vous de choisir l'epr dans lequel vous placer, ainsi que $F$ et le vecteur $\vec{x}$ à projeter!

**exemple 37: méthode des moindres carrés**

On considère $n$ points du plan $A_i(x_i,y_i)$.
On souhaite déterminer la droite $D$
d'équation $y = ax + b$ qui minimise
la somme des carrés des distances verticales
entre un point et la droite,
c'est à dire on souhaite déterminer
$\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$

On se place dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du psu.

On note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ainsi que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

On note $F = \text{vect}(X,U)$ On suppose que les $x_i$ ne sont pas tous égaux (hypothèse $(H)$)

1. Interpréter géométriquement l'hypothèse $(H)$. Que vaut $\dim F$?
2. On note $a_0X + b_0U$ le projeté orthogonal de $Y$ sur $F$.
   (a) Montrer que $< Y - a_0X - b_0U,X >=< Y - a_0X - b_0U,U >= 0 \quad (*)$
   (b) Montrer que matriciellement $(*)$ s'écrit $\underbrace{\begin{pmatrix} ||X||^2 & < U,X > \\ < U,X > & ||U||^2 \end{pmatrix}}_{=M} . \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < Y,X > \\ < Y,U > \end{pmatrix}$
   (c) Calculer $\det(M)$ et justifier que, grâce à l'hypothèse $(H)$, on peut affirmer que $\det(M) \neq 0$
   (d) En déduire que $(a_0,b_0)$ vérifie le système $\begin{cases} a_0 . \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b_0 . \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 .. \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n.b_0 & = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$
   (e) Il est d'usage de noter en Statistique

$$\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \mu_{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{et} \quad \mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   Montrer que $\boxed{a_0 = \dfrac{\mu_{xy} - \mu_x.\mu_y}{\mu_{x^2} - \mu_x^2} \text{ et } b_0 = \mu_y - a_0.\mu_x}$

# 6 Rappels sur les projections: orthogonales ou non

**définition 10:**

Soit $E = F_1 \oplus F_2$ (ainsi $\forall \vec{x} \in E\,, \exists!(\vec{x}_1,\vec{x}_2) \in F_1 \times F_2\,, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$)
La projection vectorielle sur $F_1$ parallèllement à $F_2$ est l'endomorphisme de $E$, noté $p_{F_1}$,
défini par $\boxed{\begin{array}{llcl} p_{F_1}: & E & \longrightarrow & E \\ & \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 & \longmapsto & p_{F_1}(\vec{x}) = \vec{x}_1 \end{array}}$
.

*"$p_{F_1}(\vec{x})$ est l'unique vecteur de $F_1$ tel que $\vec{x} - p_{F_1}(\vec{x}) \in F_2$"*

**remarque 4**

*l'endomorphisme $id_E - p_{F_1}$ n'est rien autre que la projection sur $F_2$ parallèlement à $F_1$ : on le note $p_{F_2}$ et s'appelle le projecteur associé à $p_{F_1}$*

**théorème 18: noyau et image d'une projection**

Soit $p_{F_1}$ une projection (notations de la définition 10), on a :

i.) $\ker p_{F_1} = F_2$

ii.) $\operatorname{Im} p_{F_1} = F_1 = \ker(p_{F_1} - id_E)$ (*"$F_1$ est l'ensemble des vecteurs invariants par $p_{F_1}$"*)

iii.) $p_{F_1}$ est un projecteur

*"on projette sur l'image parallèlement au noyau"*

**remarque 5 (*éléments propres*)**

- *les valeurs propres d'un projecteur sont* 0 *et* 1
- $E_0(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1})$ *est l'espace parallèlement auquel on projette*
- $E_1(p_{F_1}) = \operatorname{Im}(p_{F_1}) = \ker(p_{F_1} - id_E)$ *est l'espace sur lequel on projette*
- *Si $E$ est de dimension finie, un projecteur de $E$ est toujours diagonalisable*

**théorème 19: caractérisation matricielle d'un projecteur**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$, avec $\dim E = n < \infty$. Il y a équivalence entre :

i.) $f$ est un projecteur

ii.) il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ pour laquelle on a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{r}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-r})$$

et dans ce cas, on a alors $\boxed{\operatorname{tr} f = \operatorname{rg} f = r}$

**exemple 38:**

Soit $E = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire usuel $<\,,\,>$. On note $(\vec{i},\vec{j})$ sa base canonique.
On note $D_1 = \operatorname{vect}(\vec{i}), D_2 = \operatorname{vect}(\vec{i} - \vec{j})$ et $D_3 = \operatorname{vect}(\vec{i} + \vec{j})$

1. Déterminer l'image du vecteur $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j}$ par la projection sur $D_1$ parallèlement à $D_2$
2. Déterminer l'image du vecteur $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j}$ par la projection sur $D_3$ parallèlement à $D_2$