EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Serge Lemarquis

Dans tout ce chapitre, on adoptera les notations suivantes :

- I désignera un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{K}$ désignera le corps des réels ou des complexes
- a, b, c et d désigneront quatre fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$

Table des matières

---

exemple 1:

Résoudre l'équation différentielle $x.y' + \sin(x).y = 1$ sur $\mathbb{R}$

- *Il s'agit de déterminer toutes les fonctions y, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, x.y'(x) = \sin(x).y(x) = 1$*
- *On peut remarquer de suite que cette équation différentielle ne possède pas de solution sur $\mathbb{R}$! En effet, si une solution existait elle devrait vérifier en particulier $0.y'(0) + \sin(0).y(0) = 1$, càd $0 = 1$ ce qui est impossible!*
- *En revanche, si on souhaite résoudre cette équa. diff. sur $]0, +\infty[$, un théorème nous permettra d'affimer qu'une infinité de solutions existent!*
- **On retiendra de cet exemple que l'intervalle de résolution de l'équation différentielle est une hypothèse très importante dont il faut tenir compte!**

1 Rappels sur la dérivabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et f une fonction de $I \to \mathbb{K}$

définition 1: dérivabilité

i) On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe **et est finie.**
On note alors
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

ii) On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

iii) On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

iv) On dit que f est dérivable sur l'intervalle I lorsque f est dérivable en tout $x_0 \in I$

On montre que:
f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et que ces dérivées sont égales

théorème 1: la dérivabilité entraîne la continuité

Si f est dérivable en x_0 [sur I] alors f est continue en x_0 [sur I].

définition 2: fonction de classe C^p

On dit qu'une fonction f est de classe C^p sur un intervalle I lorsque f est $p-$fois dérivable sur I et que sa dérivée $p-$ième, $f^{(p)}$, est continue sur I.
rem: en particulier, dire qu'une fonction est de classe C^1 signifie que f est dérivable et que sa dérivée est continue.(et non pas que que f est dérivable et continue, comme on le lit parfois!)
rem: on montre que $C^p(I,\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$

théorème 2: fonction à dérivée nulle ... sur un intervalle!

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de $I \to \mathbb{K}$. Alors:

f est constante sur I ssi sa dérivée est nulle sur I

théorème 3: théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Soit f une fonction définie et continue sur I, dérivable sur $I - \{x_0\}$.
Alors:

i) Si $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ (càd limite finie) alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$

ii) Si $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0; la courbe présente une tangente verticale au point $(x_0,f(x_0))$

exemple 2:

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x)=e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$

1. Montrons que f est continue en 0
   - *f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues.*
   - *f est continue en* 0
     en effet: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$
   - *On a montré que f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.*
2. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
   - *f est dérivable (et même C^∞ !) sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonctions dérivables,*
     et l'on a $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$
   - Montrons que f est dérivable en 0 de deux manières différentes:
   - *On a montré que f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier*

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 équation homogène

théorème 4: structure de l'ensemble des solutions, solution générale

Soit l'équation $\boxed{y' + a(x)y = 0}$ où $a \in C^0(I,\mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$

1. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un espace vectoriel de dimension 1
2. La solution générale est $\boxed{\begin{array}{rcl} y : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & K.\exp(-A(x)) \end{array}}$ avec $K \in \mathbb{K}$ quelconque

rem: ceci signifie que les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & K.\exp(-A(x)) \end{array}}$
où K désigne une constante réelle ou complexe quelconque, et A une primitive de a sur I.

rem: ainsi en notant $f_1 : x \mapsto e^{-A(x)}$ on a

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{K.f_1 \,|\, K \in \mathbb{K}\} = \mathrm{vect}(f_1) = \{x \mapsto K.e^{-A(x)} | K \in \mathbb{K}\} = \mathrm{vect}(x \mapsto e^{-A(x)})}$$

démonstration:
Comme sur I la fonction e^A ne s'annule pas, on a les équivalences

$$y' + a.y = 0 \iff (y' + a.y).e^A = 0 \iff \left(y.e^A\right)' = 0$$

Comme I est un intervalle, ceci équivaut à dire que la fonction $y.e^A$ càd la fonction $x \mapsto y(x)e^{A(x)}$ est constante sur I. On a ainsi les équivalences

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de l'équation différentielle sur } I &\iff \exists K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x)e^{A(x)} = K \\ &\iff \exists K \in \mathbb{K}, \forall x \in I, y(x) = Ke^{-A(x)} \end{aligned}$$

méthode 1: résolution d'une EDLH du premier ordre

La résolution consiste à déterminer une primitive de la fonction a puis à écrire la solution générale.
exemple:
Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$ *sur* $]-\infty,1[= I$

- *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.*
- *La fonction* $a : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ *est définie et continue sur* $]-\infty,1[= I$*, elle possède donc des primitives sur cet intervalle.*
- *Une primitive de la fonction a sur I est* $\begin{array}{rcl} A :]-\infty,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2\sqrt{1-x} \end{array}$
- *La solution générale est ainsi* $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-\infty,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\exp(2\sqrt{1-x}) \end{array}}$ *avec K constante arbitraire.*

exemple 3:
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
Dans chacun des cas suivants, sans résoudre l'équation différentielle, répondre aux questions suivantes: S est-il un espace vectoriel? Peut-on préciser sa dimension?

1. $(E) : y' + \cos(x).y = 0$ 2. $(E) : x.y' + \cos(x).y = 0$ 3. $(E) : \mathrm{ch}(x).y' + \cos(x).y = 0$

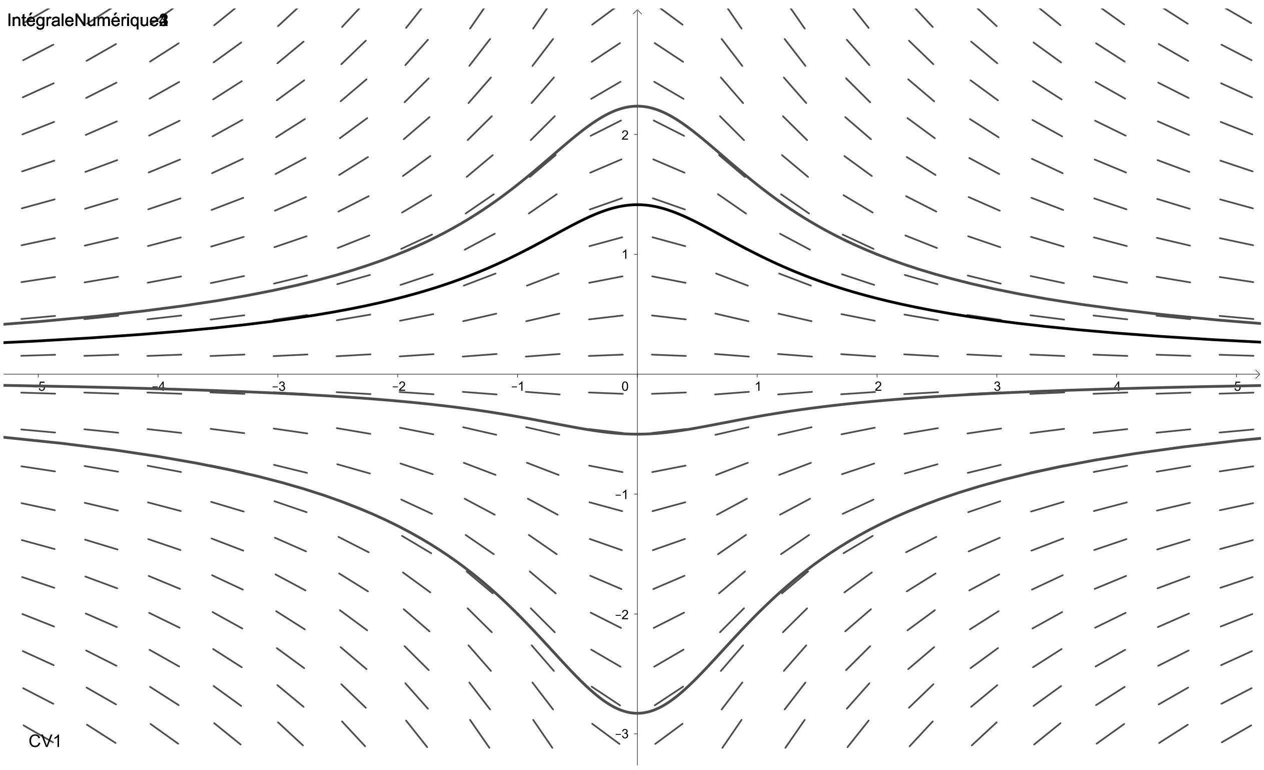
exemple 4: résolution $(1+x^2)y'+xy=0$ sur $\mathbb{R}$.

- On commence par remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$, et donc

$$\text{résoudre } (1+x^2)y'+xy=0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ \underline{équivaut à} résoudre } y'+\frac{x}{1+x^2}y=0 \text{ sur } \mathbb{R}\ .$$

  Cette démarche préalable est indispensable à faire, car elle nous permet de nous placer dans les hypothèses exactes du théorème.
  Si à la place de $1+x^2$ nous avions eu $1-x^2$ la situation aurait été bien différente et beaucoup plus complexe (problème de recollement en $\pm 1\ldots$ voir l'exemple 19 en particulier)

- Avant de passer à la résolution de cette modeste équation différentielle, donnons-en une interprétation géométrique :



- *On a représenté ci-dessus le champ des tangentes associé à cette équation différentielle (càd au point de coordonnées (x,y) on a tracé un segment de pente $-\dfrac{x}{1+x^2}.y$) ainsi que le graphe de plusieurs solutions*
  Finissons par donner l'expression explicite de y : une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$ et donc la solution générale cherchée est $\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}} \end{array}}$.

remarque 1 (*définition de courbe intégrale*)

On appelle <u>courbe intégrale d'une équation différentielle</u> la courbe représentative d'une solution de cette équation différentielle.
Dans l'exemple ci-dessus, les courbes intégrales de l'équation différentielle $(1+x^2)y'+xy=0$ sont les représentations graphiques des fonctions du type $f_K : x \mapsto \dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $K \in \mathbb{R}$

2.2 équations avec second membre

théorème 5: solution générale

Soit l'équation $\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$ (ED1) où a et $b \in C^0(I,\mathbb{K})$ et I intervalle de $\mathbb{R}$.

1. La solution générale de l'équation avec second membre membre s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
2. La solution générale de l'équation différentielle est

$$x \mapsto \left(K + \int^x b(t)e^{A(t)}dt\right).e^{-A(x)} = \underbrace{\left(\int^x b(t)e^{A(t)}dt\right) e^{-A(x)}}_{\text{sol.part.}} + \underbrace{Ke^{-A(x)}}_{\text{sol.géné}}$$

où K désigne une constante arbitraire et $x \mapsto \displaystyle\int^x b(t).e^{A(t)}dt$ une primitive de la fonction $b.e^A$

rem :cette formule n'est pas à connaître mais à savoir retrouver
rem: ainsi $\mathcal{S} = \{x \mapsto f_0(x) + K.e^{-A(x)} | K \in \mathbb{K}\} = f_0 + \text{vect}(x \mapsto e^{-A(x)}) = f_0 + \mathcal{S}_H$

démonstration:
c'est la même idée que pour la première démo.
On a, sur I,les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} y' + ay = b &\iff (y' + ay)e^A = be^A \\ &\iff \left(y.e^A\right)' = be^A \\ &\iff y.e^A = K + \int be^A \text{ où } \int be^A \text{ désigne une primitive de } be^A \text{ sur } I \\ &\iff y = \left(K + \int be^A\right) e^{-A} \end{aligned}$$

remarque 2

- *On appelle* <u>*solution de l'équa.diff* $y' + a(x)y = b(x)$ *sur* I</u> *toute fonction* f *définie et dérivable sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *telle que* $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$
- *Résoudre l'équation* $y' + a(x)y = b(x)$ *c'est* <u>*trouver toutes les fonctions* f *définies et dérivables sur* I</u> *à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *telles que* $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$

remarque 3

- *Si* f *est solution de (ED1) alors* f *est nécessairement dérivable (et donc continue)*
- *vu que* $f' = b - af$ *avec* a, b *et* f *fonctions continues,*
  on en déduit que f' *est aussi une fonction continue,*
  c'est à dire que f *est nécessairement de classe* C^1 *sur* I
  Ceci justifie que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est toujours inclus dans } C^1(I,\mathbb{K})}$

exemple 5: la difficulté réside en la recherche de la primitive. . .
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + \exp(x^2).y = 2.\exp(x^2)$

remarque 4 (*principe de superposition*)

1. *On peut déterminer une solution particulière grâce au principe de superposition:*
   si $\begin{cases} y_1 \text{ est sol. de } y' + a(x)y = b_1(x) \\ y_2 \text{ est sol. de } y' + a(x)y = b_2(x) \end{cases}$ **alors** $\lambda y_1 + y_2$ *est sol. de* $y' + a(x)y = \lambda b_1(x) + b_2(x)$
   (λ étant une constante scalaire)
2. *à noter que la fonction constante* $x \mapsto 1$ *est solution de l'équation :* $y' + a(x)y = a(x)$

méthode 2: variation de la constante

On détermine souvent (c'est à dire pas toujours. . .), en l'absence de solution évidente, une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante : si y_0 est une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur I, alors on cherche les solutions de l'équation complète sous la forme $y(x) = K(x)y_0(x)$. En remplaçant dans l'équation différentielle on obtient K', qu'il reste ensuite à primitiver.

Exemple:

Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{y}{2x} = \sqrt{x}\ln x$ *(E) sur* $]0, +\infty[$.

- *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre*
- *On commence par résoudre l'équation homogène associée, càd* $y' - \dfrac{y}{2x} = 0$.

  La fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} a : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2x} \end{array}}$ *est continue sur* $]0, +\infty[= I$

  Une primitive de cette fonction sur I *est* $\boxed{\begin{array}{rcl} A : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\ln x \end{array}}$

  La solution générale de l'équation homogène est donc $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.\sqrt{x} \end{array}}$ *avec* K *constante réelle arbitraire*
- *En l'absence de solution évidente, on pose* $y(x) = K(x).\sqrt{x}$ *et on remplace dans (E)*
  On aboutit à $K'(x) = \ln x$
  Par quadrature(=primitivation) on aboutit à $K(x) = x\ln x - x + Cste$
  Une solution particulière est donc $y_0(x) = \sqrt{x}(x\ln x - x)$
- *La solution générale de l'équation avec second membre étant égale à la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène,*
  on trouve ici comme solution générale de (E)

  $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}(x\ln x - x) + K.\sqrt{x} \end{array}}$ *avec* K *constante réelle arbitraire*

exemple 6:

Résoudre $y' - \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$

remarque 5

Dans le cas d'une équation du type : $y' + ay = P(x)e^{mx}$ *où* a *et* m *sont des constantes réelles ou complexes, et* P *un polynôme, par la méthode des coefficients indéterminés, on peut chercher une solution particulière sous la forme* $y(x) = Q(x)e^{mx}$ *avec* Q *polynôme tel que*

- *si* $m = -a$, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$
- *si* $m \neq -a$, $\deg(Q) = \deg(P)$

théorème 6: problème de Cauchy linéaire du premier ordre

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et a et $b \in C^0(I,\mathbb{K})$
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors :

il <u>existe une unique</u> fonction f définie sur I telle que $\begin{cases} \forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\ \textbf{et } f(x_0) = y_0 \end{cases}$

càd il existe une unique solution sur I *de l'équation différentielle* $y' + a(x)y = b(x)$ *tel que* $y(x_0) = y_0$

exemple 7: sans aucun calcul!

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $y' - \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{x}$ avec la condition $y(\pi) = 2$

remarque 6

- *Avec l'interprétation géométrique de l'équation différentielle en terme de champ, ce théorème se comprend vraiment bien... Non?*
- *important : dans le théorème précédent, <u>la condition initiale</u> est du type* $f(x_0) = y_0$*. Si l'on considère une condition initiale du type* $f'(x_0) = y_0$ *ou encore* $\lim_{\infty} f = y_0$ *, il n'y a <u>aucune</u> raison pour qu'il y ait existence et unicité de la solution. (cf. exemple 4 et exemple* **??***)*

remarque 7 (*A savoir retrouver*)

Il est facile de montrer que la fonction f *définie sur* I *par*
$\boxed{f(x) = \left(y_0.e^{A(x_0)} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\right) e^{-A(x)}}$ *est bien solution et qu'il n'en existe aucune autre*
On reprend la démonstration du théorème 5 en considérant lors de la quadrature la primitive qui s'annule en x_0

2.3 cas des équations différentielles avec un coefficient en facteur de y'

définition 3:

a, b et c désignant 3 fonctions continues sur un intervalle I

1. on appelle équations différentielles linéaires du premier ordre toute équation du type

$$\boxed{a(x)y' + b(x)y = c(x)}$$

2. on appelle équations différentielles linéaires du premier ordre homogène ou sans second membre toute équation du type $\boxed{a(x)y' + b(x)y = 0}$

remarque 8

1. *Une équations différentielles linéaires du premier ordre homogène possède toujours au moins une solution définie sur I, à savoir la fonction constante nulle. (l'ensemble des solutions n'est jamais vide)*
2. *Une équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre peut ne pas possèder de solution définie sur I. (l'ensemble des solutions peut être vide ex: $xy' + xy = 1$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$)*
3. ***L'ensemble des solutions d'une équations différentielles linéaires du premier ordre homogène est un espace vectoriel (démonstration facile), mais on ne peut prédire sa dimension (contrairement aux équations différentielles linéaires normalisées)** comme le montre l'exemple 21*
   (preuve de la stabilité par combinaison linéaire)
   Soient y_1 et y_2 deux solutions de $a.y' + b.y = 0$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   On a

$$\begin{aligned} a.(\lambda y_1 + y_2)' + b.(\lambda y_1 + y_2) &= a.(\lambda y_1' + y_2') + b.(\lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda(a.y_1' + b.y_1) + (a.y_2' + b.y_2) = \lambda.0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

4. ***Lorsque la fonction a ne s'annule pas sur I**, résoudre l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur I équivaut à résoudre l'équation $y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}y = \dfrac{c(x)}{a(x)}$ sur I. (et donc tous les résultats des paragraphes précédents s'appliquent)*
5. *Dans la pratique, on détermine les valeurs où a s'annule, on résout sur chacun des intervalles ne contenant pas les racines précédentes, puis on traite les recollements(=raccordements)*

exemple 8:

On considère l'équation $x(x-1)y' + (x+1)^2 y = x^2$ (E)

- Résoudre (E) sur $]-\infty,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$ se fait de manière classique, car

$$\text{sur chacun de ces 3 intervalles } (E) \Longleftrightarrow y' + \frac{(x+1)^2}{x(x-1)}y = \frac{x}{x-1}$$

- Par théorème, on peut affirmer qu'il existe une unique fonction f définie sur $]1,+\infty[$ qui soit solution de (E) et telle que $f(3) = \pi$
- En revanche on ne peut rien dire quant à l'existence et l'unicité d'une fonction f définie sur $]0,+\infty[$ qui soit solution de (E) et telle que $f(3) = \pi$.
  Nous sommes alors obligés d'étudier le raccordement en 1

3 Equations différentielles linéaires du second ordre

3.1 au programme de spé : seulement deux théorèmes et une méthode

théorème 7: admis

a, b et c désignent trois fonctions continues sur un intervalle I

1. L'ensemble des solutions de l'équation $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ (EDH2)}}$ est un espace vectoriel de dimension 2
2. La solution générale de l'équation $\boxed{y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \text{ (ED2)}}$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (EDH2).

ceci signifie que:

- *La solution générale de (EDH2) est de la forme $y = A.f_1 + B.f_2$*
- *La solution générale de (ED2) est de la forme $y = f_0 + A.f_1 + B.f_2$*

où

- *f_1 et f_2 sont deux fonctions linéairement indépendantes*
- *A et B sont deux constantes scalaires quelconques.*

On écrit encore:

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{vect}(f_1,f_2) \text{ et } \mathcal{S} = f_0 + \mathrm{vect}(f_1,f_2)$$

remarque 9

1. *On appelle* <u>*solution de (ED2) sur I*</u> *toute fonction f définie et deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $\forall x \in I, f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$*
2. *Si f est solution alors f est nécessairement deux fois dérivable ce qui implique que f' et f sont continues.*
   Vu que $f'' = c - af' - bf$ avec a, b, c, f et f' fonctions continues
   on en déduit que f'' est aussi une fonction continue,
   c'est à dire que f est nécessairement de classe C^2 sur I
   Ceci justifie que $\boxed{\textit{l'ensemble des solutions est toujours inclus dans } C^2(I,\mathbb{K})}$

méthode 3: si l'on dispose d'un point de départ...

On considère l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et

<u>on suppose que l'on connait une solution, notée f_1, de l'équation homogène associée, et que de plus f_1 ne s'annule pas sur l'intervalle I.</u>

La méthode consiste à chercher les solutions de l'équation complète sous la forme $y(x) = f_1(x).z(x)$.
On est alors ramené à une équation différentielle linéaire du premier ordre en z'.
En effet

$$\begin{aligned}
y'' + ay' + by = c &\iff (f_1 z)'' + a(f_1 z)' + b(f_1 z) = c \\
&\iff (f_1'' z + 2f_1' z' + f_1 z'') + a(f_1' z + f_1 z') + bf_1 z = c \\
&\iff f_1 z'' + (2f_1' + af_1)z' + \underbrace{(f_1'' + af_1' + bf_1)}_{=0} z = c \\
&\iff z'' + \frac{2f_1' + af_1}{f_1} z' = \frac{c}{f_1}
\end{aligned}$$

On résout alors cette équation différentielle puis, par primitivation, on détermine z, et en multipliant par f_1 on a y !

Cette méthode consiste à faire un changement de fonction inconnue.

exemple 9:
Soit $(E) : (x^2 - 6x - 1)y'' - 2(x - 3)y' + 2y = 0$

1. Déterminer les polynômes de degré inférieur ou égal à deux solutions sur $\mathbb{R}$.
2. Soit I un intervalle sur lequel $x^2 - 6x - 1$ ne s'annule pas. Résoudre (E) sur I... sans calcul!

exemple 10: dans cet exemple, il y a abondance de "f_1"
résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$ (ED2).

- *l'équation homogène a pour solution générale* $\boxed{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} \end{array}}$
- *Pour appliquer la méthode ci-dessus, il nous suffit de prendre une solution particulière (si possible qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) de l'équation homogène ci-dessus.*
  Par exemple, on prend la fonction $f_1 : x \mapsto e^{-3x}$.
  Et pour résoudre (ED2), on pose $y(x) = e^{-3x}.z(x)$.
  On a donc
  $$y'(x) = e^{-3x}(z' - 3z) \text{ et } y''(x) = e^{-3x}(z'' - 6z' + 9z)$$
  En reportant dans (ED2), on obtient
  $$e^{-3x}z'' = \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$$
  ce qui équivaut à
  $$z'' = \frac{1}{1 + x^2}$$
  Une première quadrature nous donne
  $$z' = \arctan x + C \text{ avec } C \text{ constante réelle}$$
  Une nouvelle intégration fournit
  $$z = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + Cx + D \text{ avec } D \text{ constante réelle.}$$
- *On a donc trouvé* $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right).e^{-3x} + Cxe^{-3x} + De^{-3x} \end{array}}$ *avec* $(C,D) \in \mathbb{R}^2$

  rem: on peut remarquer que la solution trouvée est bien de la forme attendue...

L'exemple qui suit est classique: comme vous ne pouvez deviner une solution de l'équation homogène associée (la fameuse fonction notée f_1 de la méthode), on vous fournit une indication qui a pour but de vous permettre de commencer (... puis de finir...) la résolution.

exemple 11:
Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$ sachant qu'il existe une solution polynomiale à l'équation homogène associée.

exemple 12:
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2y'' - 2y = 3x^2$
(on devra trouver $y : x \mapsto x^2 \ln x + Ax^2 + \dfrac{B}{x}$)

théorème 8: existence et unicité de la sol. à un pb de Cauchy linéaire du 2nd ordre

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et a, b et $c \in C^0(I,\mathbb{K})$
Soit $x_0 \in I$ et y_0, y_1 deux réels ou complexes.
Alors : il existe une unique fonction f définie sur I telle que

$$\begin{cases} \forall x \in I, f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x) \\ f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

càd il existe une unique sol. sur I de l'équa.diff. $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ tel que $\begin{cases} y(x_0) & = y_0 \\ y'(x_0) & = y_1 \end{cases}$

exemple 13:

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + \cos(x).y = x^2 \quad$ (E)

1. Combien passe-t-il de courbes intégrales de (E) par le point (0,1)?
2. On note f l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (E) avec les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Montrer que la fonction f est paire. *(on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(-x)$)*

1.
2. *Nous allons montrer que g vérifie le même problème de Cauchy que f.*
   - *on a $g(x) = f(-x)$ et donc $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$ pour tout x réel*
   - *ainsi $g(0) = f(-0) = f(0) = 1$ et $g'(0) = -f'(-0) = -f'(0) = 0$*
   - *pour tout x réel, on a*

$$\begin{aligned} g''(x) + xg'(x) + \cos(x)g(x) &= f''(-x) + x(-f'(-x)) + \cos(x)f(-x) \\ &= f''(-x) + (-x)f'(-x) + \cos(-x)f(-x) && \textit{car } \cos \textit{ est paire} \\ &= f''(X) + Xf'(X) + \cos(X)f(X) && \textit{on a posé } X = -x \\ &= X^2 && \textit{car } f \textit{ est solution de } E \\ &= (-x)^2 = x^2 \end{aligned}$$

Ainsi f et g vérifie le même problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + \cos(x).y = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$,

par unicité à un tel problème, on peut affirmer que $f = g$, càd $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$

3.2 équations différentielles du second ordre à coefficients constants (cours de sup)

On considère l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants : $\boxed{(H) \quad ay'' + by' + cy = 0}$
avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ **des constantes**.

définition 4:

On appelle équation caractéristique de (H) l'équation du second degré $\boxed{aX^2 + bX + c = 0 : (E_c)}$

théorème 9: Cas des fonctions à valeurs complexes

Δ désignant le discriminant de (E_c), on a :

i) cas où $\Delta \neq 0$. notons r_1 et r_2 les deux racines distinctes de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}}$

ii) cas où $\Delta = 0$. notons r_0 la racine double de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0 x}}$

et dans les deux cas, A et B désignent des constantes complexes arbitraires.

théorème 10: Cas des fonctions à valeurs réelles

ici on a $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, et Δ désigne le discriminant de (E_c), on a :

i) cas où $\Delta > 0$. notons r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}}$

ii) cas où $\Delta = 0$. notons r_0 la racine double réelle de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto (A.x + B)e^{r_0 x}}$

iii) cas où $\Delta < 0$. notons $\alpha \pm i\beta$ les racines complexes conjuguées de E_c
La solution générale de (H) est $\boxed{y : x \mapsto = e^{\alpha x}(A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x))}$

et dans les trois cas, A et B désignent des constantes réelles arbitraires.

Fréquemment, on rencontrera des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec un second membre du type $P(x).e^{mx}$ avec m constante complexe et $P(x)$ polynôme. Dans la suite de ce paragraphe nous nous intéresserons à ce type d'équation différentielle.
On note $\boxed{(E) : ay'' + by' + cy = P(x).e^{mx}}$ et $\boxed{(E_c) : aX^2 + bX + c = 0}$

remarque 10

le théorème 11 nous permet de déterminer une solution particuliére de l'équation complète (E) sans utiliser la méthode de la variation de la constante (qui nécessite des intégrations...), mais en procédant avec une technique simple de coefficients inconnus (...et de dérivation).

théorème 11:

Il existe une solution particulière de (E) du type $x \mapsto e^{mx}Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et de plus :

- *si m n'est pas solution de E_c alors $\deg Q = \deg P$*
- *si m est racine simple de E_c alors $\deg Q = \deg P + 1$*
- *si m est racine double de E_c alors $\deg Q = \deg P + 2$*

exemple 14: résoudre $y'' + 4y' + 4y = 2\operatorname{sh}(2x) = e^{2x} - e^{-2x}$

- l'équation caractéristique est $X^2 + 4X + 4 = 0$. On a une racine double -2
- la solution générale de l'équation homogène est donc $y : x \mapsto \lambda.e^{-2x} + \mu.xe^{-2x}$
- on cherche une solution particulière de $y'' + 4y' + 4y = e^{2x}$
  On la cherche de la forme Ae^{2x}
  On remplace dans l'équation et on tombe sur $A = \dfrac{1}{16}$
- on cherche une solution particulière de $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$
  On la cherche de la forme Bx^2e^{-2x}
  On remplace dans l'équation est on tombe sur $B = \dfrac{1}{2}$
- on utilise le principe de superposition des solutions : la solution générale est

$$y = \frac{1}{16}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \lambda.e^{-2x} + \mu.xe^{-2x}$$

exemple 15: résoudre $y'' - 4y' + 3y = 2x + 2e^{-x} + 5$

- l'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3) = 0$
- la solution générale de l'équation homogène est donc $y : x \mapsto \lambda.e^{x} + \mu.e^{3x}$
- on cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = 2e^{-x}$
  On la cherche sous la forme Ae^{-x}
  On remplace dans l'équation et on tombe sur $A = \dfrac{1}{4}$
- on cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = 2x + 5$
  On la cherche sous la forme $Bx + C$
  On remplace dans l'équation et on tombe sur $B = \dfrac{2}{3}$ et $C = \dfrac{23}{9}$
- on utilise le principe de superposition des solutions : la solution générale est

$$y = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{2}{3}x + \frac{23}{9} + \lambda.e^{x} + \mu.e^{3x}$$

méthode 4: second membre du type $e^{mx}\cos x, e^{mx}\sin x, e^{mx}.P(x).\cos x$ **ou** $e^{mx}.P(x).\sin x$

Il y a deux méthodes possibles:

1. on complexifie l'équation différentielle.
2. on cherche une solution de la forme $e^{mx}.(Q_1(x)\cos x + Q_2(x)\sin x)$ à l'aide de coefficients réels inconnus

exemple:

résoudre $y'' - 2y' + 5y = e^{x}.\cos(\omega.x)$ *avec* $\omega > 0$

- *l'équation caractéristique est* $X^2 - 2X + 5 = 0$, *qui possède comme solutions* $1 \pm 2i$
- *la solution générale de l'équation homogène est donc*

$$y : x \mapsto e^{x}.(\lambda.\cos(2x) + \mu.\sin(2x))$$

- *ici, pour déterminer une solution particulière, on peut complexifier l'équation: ceci consiste à chercher une solution particulière de l'équation* $\overline{z}'' - 2\overline{z}' + 5\overline{z} = e^{x}.e^{i\omega x} = e^{(1+i\omega)x}$ *puis à prendre la partie réelle de cette solution.(*$\overline{z}$ *désigne l'inconnue complexifiée))*
  (Il y aura deux cas à envisager suivant que $\omega = 2$ *ou pas)*
- *rem: une autre méthode consiste à chercher une solution particulière sous la forme* $Q_1(x)\cos x + Q_2(x)\sin x$ *avec* Q_1 *et* Q_2 *deux polynômes aux coefficients réels inconnus*

exemple 16:

Déterminer les solutions à valeurs réelles de $y'' + y' + y = \sin^3(x)$

méthode 5: changement de variable dans une équation différentielle

Dans certains exercices, on demande de résoudre une équation différentielle à l'aide d'un changement de variable.(par exemple, on demande de poser $t = \ln x$). La méthode consiste alors à définir une nouvelle fonction inconnue z qui dépendra de la nouvelle variable et qui vérifiera $z(t) = y(x)$.

Un changement de variable dans une équation différentielle entraine toujours un changement de fonction inconnue

(Attention! on n'a pas $z'(t) = y'(x)$! ...)

Exemple

Résoudre sur $]0,+\infty[$ *l'équation* $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ *à l'aide du changement de variable* $x = e^t$.
(écrire les solutions à valeurs réelles)

- *On commence par écrire que pour tout* $x > 0$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a l'équivalence*

$$x = e^t \iff t = \ln x$$

- *On considère une fonction inconnue* z *qui dépend de la variable* t *telle que*

$$\forall x > 0, y(x) = z(t) = z(\ln(x))$$

- *En dérivant par rapport à* x *chaque membre de l'égalité* $y(x) = z(\ln x)$, *on trouve:*

$$y'(x) = \frac{1}{x}.z'(\ln x) \text{ puis } y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$$

- *En reportant dans l'équation cela donne*

$$\forall x > 0, x^2\left(-\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)\right) + x\left(\frac{1}{x}.z'(\ln x)\right) + 4z(\ln x) = 0$$

  Soit $\forall x > 0, z''(\ln x) + 4z(\ln x) = 0.$

  En revenant à la variable t *cela donne* $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + 4z(t) = 0.}$

- *La solution générale de cette équation est* $\boxed{\begin{array}{rcl} z:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & A.\cos(2t) + B.\sin(2t) \end{array}}$ *avec* $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

- *La solution générale de l'équation initiale est donc*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} y:]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A.\cos(2\ln x) + B.\sin(2\ln x) \end{array}} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

remarque: comme on a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(x) = y(e^t)$$

On peut dériver par rapport à t *et on obtient*

$$z'(t) = e^t.y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t.y''(e^t) + (e^t)^2y'(e^t)$$

ce qui donne

$$z'(t) = xy'(x) \text{ et } z''(t) = xy''(x) + x^2y'(x)$$

4 Equations différentielles et séries entières

exemple 17:
Déterminer les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

Partie Analyse:
On suppose qu'il existe une solution y de l'équation différentielle sous la forme d'une série entière de rayon $R \neq 0$.

- On considère donc $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une SE de rayon $R \neq 0$
  Le théorème de dérivation terme à terme des SE nous dit que
  - y est C^∞ sur $]-R,+R[$
  - $\forall x \in]-R,+R[, y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$
  - $\forall x \in]-R,+R[, y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$
- On a alors pour tout $x \in]-R,+R[$

$$\begin{aligned}
x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n+2)a_n x^n
\end{aligned}$$

- On se souvient que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
- **Par unicité du développement en série entière**,
  on en déduit que $\forall n \geqslant 0, (n^2+3n+2)a_n = \dfrac{1}{n!}$
  c'es à dire $a_n = \dfrac{1}{(n^2+3n+2).(n)!} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1).(n)!} = \dfrac{1}{(n+2)!}$
- On vient de prouver que **si** une solution y est dse, c'est forcément $y : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+2)!}$

Partie Synthèse:
Elle consiste ici seulement **à vérifier que le rayon de la série entière trouvée est non nul**.
Ici le rayon est infini car pour tout $r \geqslant 0$ fixé, la suite $\left(\dfrac{r^n}{(n+2)!}\right)_{n\geqslant 0}$ est majorée puisqu' elle converge vers 0

On vient de montrer qu'il existait une unique solution de (E) dse, il s'agit de $\boxed{y : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+2)!}}$

remarque: on peut exprimer la solution trouvée aisément à l'aide de fonctions usuelles

exemple 18: avec des conditions initiales

Déterminer les fxs DSE solutions de $y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Partie Analyse:

On suppose qu'il existe une solution y de l'équation différentielle sous la forme d'une série entière de rayon $R \neq 0$.

- On considère donc $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une SE de rayon $R \neq 0$
  Le théorème de dérivation terme à terme des SE nous dit que
  - y est C^∞ sur $]-R, +R[$
  - $\forall x \in]-R, +R[, y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
  - $\forall x \in]-R, +R[, y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$
- On a alors pour tout $x \in]-R, +R[$

$$\begin{aligned}
y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+1) a_n) x^n
\end{aligned}$$

  Or **une série entière est la série entière nulle ssi tous ses coefficient sont nuls**,
  on a donc $\forall n \geqslant 0, (n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+1) a_n = 0$
  Comme $(n+2)(n+1) \neq 0$, on a $\boxed{\forall n \geqslant 0, a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n}$ càd $\boxed{\forall n \geqslant 2, a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}}$
- On sait aussi que $a_0 = y(1) = 0$ et $a_1 = y'(0) = 0$
- Il est aisé de se convaincre que tous les termes d'indice impair sont nuls ($a_3 = \frac{2}{3} a_1 = 0, \dots$)
- Pour étudier les termes d'indice pair on pose $n = 2p$. On a

$$a_{2p} = 2 \frac{2p}{a_{2p-2}} = \frac{1}{p} a_{2p-2} = \frac{1}{p} \frac{2}{2p-2} a_{2p-4} = \frac{1}{p(p-1)} a_{2p-4} = \dots = \frac{a_0}{p!} = \frac{1}{p!}$$

  (pour être extrêmement rigoureux, on montrerait cette formule par récurrence)
- On vient de prouver que si une solution dse existe c'est forcément

$$y : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} x^{2p} = e^{x^2}$$

Partie Synthèse:

Elle consiste ici seulement à vérifier que le rayon de la série entière trouvée est non nul

Le rayon est ici infini car grâce aux dse de référence on peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{p!} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(x^2)^p}{p!}$

On a montré que la seule solution dse est celle écrite ci-dessus

5 Des exemples

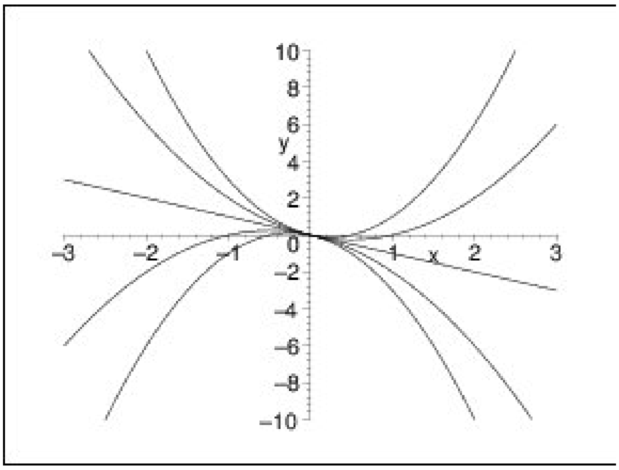
exemple 19: Voici des exemples de recollements
:

1. L'équation $xy' - 2y = x$ a pour solution générale $y : x \mapsto -x + Kx^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, toute courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à toute courbe sur $\mathbb{R}^+$

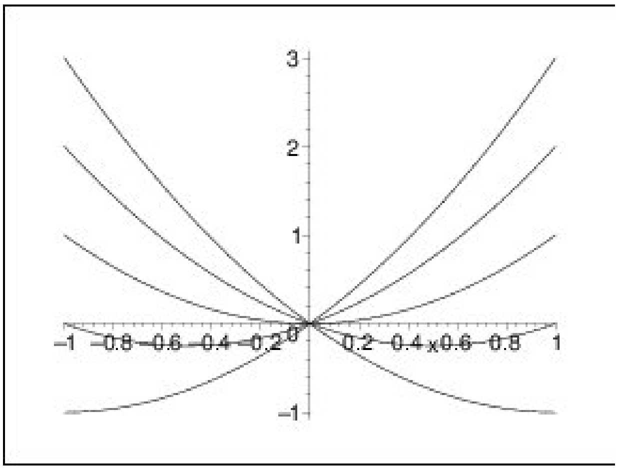
2. L'équation $xy' - y = x^2$ a pour solution générale $y : x \mapsto x^2 + Kx$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, chaque courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une courbe particulière sur $\mathbb{R}^+$

3. L'équation $x^2y' + y = 1$ a pour solution générale $y : x \mapsto 1 + Ke^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, toutes les courbes sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une seule des courbes sur $\mathbb{R}^+$

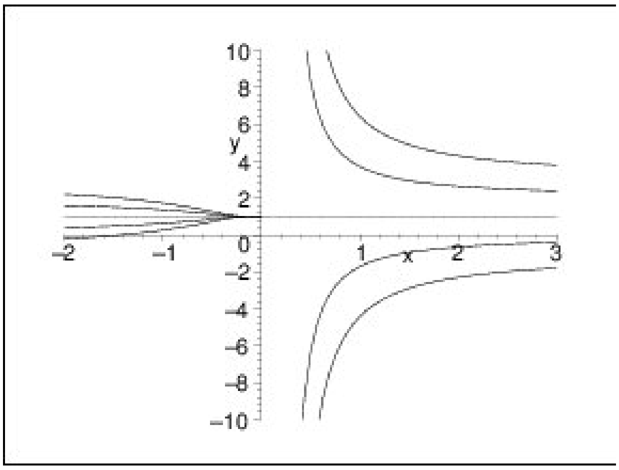
4. L'équation $xy' + y = x^2$ a pour solution générale $y : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{K}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$
   Sur $\mathbb{R}$, une seule courbe sur $\mathbb{R}^-$ se raccorde à une seule courbe sur $\mathbb{R}^+$



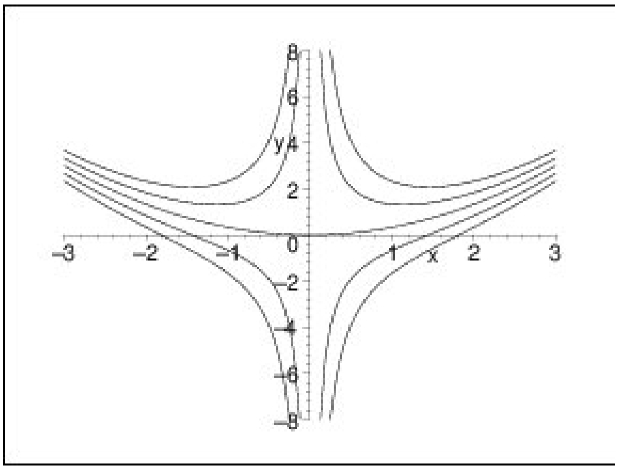
cas 1



cas 2



cas 3



cas 4

exemple 20: Etude du cas 3

- Schéma de l'étude
  1. Déterminer les solutions sur $]0, +\infty[$
  2. Déterminer les solutions sur $]-\infty, 0[$
  3. Résoudre le problème du raccordement en zéro

- **Résolution sur $]0,+\infty[$.**
  - résoudre l'équation (E) sur $]0,+\infty[$ revient à résoudre l'équation $y'+\dfrac{1}{x^2}y=\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$
  - la solution générale de l'équation sans second membre est $y : x\mapsto A.\exp(1/x)$ avec $A\in\mathbb{R}$
  - une solution particulière évidente est $y : x\mapsto 1$.
  - conclusion: la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$ est $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+A\exp(1/x)\end{array}}$
- **Résolution sur $]-\infty,0[$**
  - De la même manière, on trouve que la sol. géné. de (E) sur $]-\infty,0[$ est $\boxed{\begin{array}{rcl} y :]-\infty,0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+B\exp(1/x)\end{array}}$
- **Etude du raccordement en 0.**
  - On considère la fonction $\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1+A\exp(1/x) & \text{si } x>0 \\ 1+B\exp(1/x) & \text{si } x<0 \\ C & \text{si } x=0\end{cases}\end{array}}$ avec $(A,B,C)\in\mathbb{R}^3$
  - **On cherche les conditions sur (A,B,C) pour que la fonction y soit dérivable en zéro.**
  - Si l'on veut que y soit dérivable en zéro, y doit déjà être continue en zéro.
    On sait que f est continue en zéro ssi $\lim\limits_{0^+} f=\lim\limits_{0^-} f=f(0)$
    - On a $\lim\limits_{0^-} f=1$ car $\lim\limits_{0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{-\infty}\exp=0$
    - Pour l'étude en 0^+, il va falloir distinguer des cas car $\lim\limits_{0^+}\exp(1/x)=+\infty$
      - Si $A>0$, on a $\lim\limits_{0^+} f=+\infty$
      - Si $A<0$, on a $\lim\limits_{0^-} f=-\infty$
      - Si $A=0$, on a pour tout $x>0, f(x)=1$, et donc $\lim\limits_{0^+} f=1$
    - De ce qui précède, on peut affirmer que $\boxed{f \text{ est continue en } 0 \text{ ssi } (A,C)=(0,1)}$
      (il n'y a aucune condition sur B.) Dorénavant $(A,C)=(0,1)$
  - Etudions la dérivablité en 0.
    f est dérivable en zéro ssi les derivées à droite et à gauche en 0 existent et sont égales.
    - pour $x>0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1-1}{x}=0$.
      Donc f est dérivable à droite en zéro et $f'_d(0)=0$
    - pour $x<0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{B\exp(1/x)}{x}$. Nous allons poser $t=-1/x$ pour étudier la limite quand $x\to 0^-$. On a $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{B\exp(1/x)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}-B.t.\exp(-t)=0$ d'après le théorème des croissances comparées.
      Donc f est dérivable à gauche en zéro et $f'_g(0)=0$
    - Conclusion: $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en zéro}}$ (et ce quelle que soit la valeur de B)
  - Conclusion: la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x\geqslant 0 \\ 1+B\exp(1/x) & \text{si } x<0\end{cases}\end{array}} \text{ avec } B \text{ constante réelle arbitraire.}}$$

exemple 21:

résoudre $(E) : xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$. *Le champ correspondant est ci-dessous :*

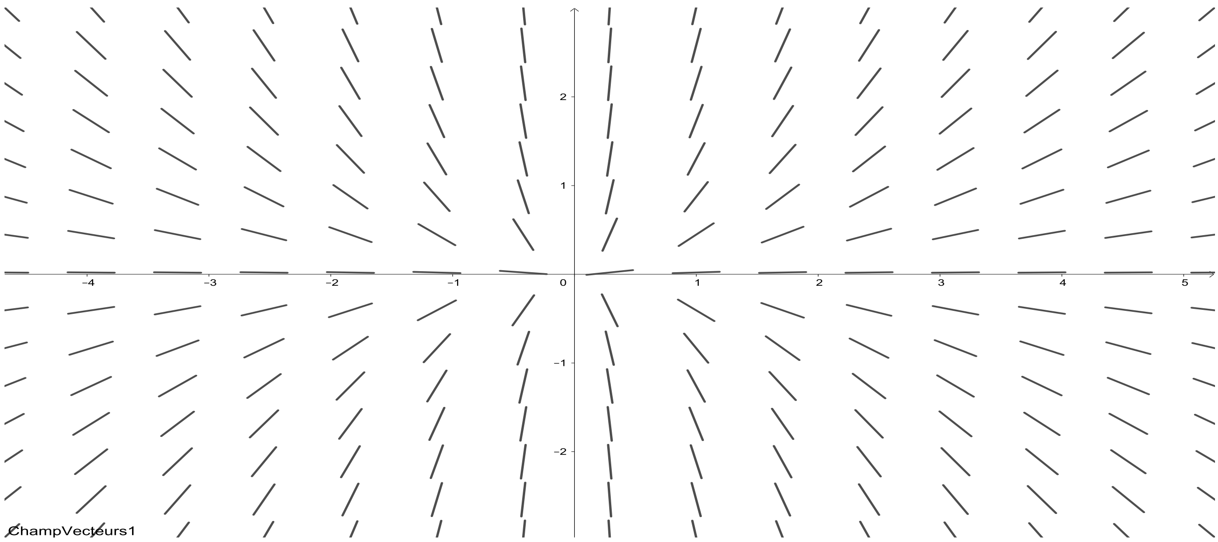


Schéma de l'étude:

1. *On résout l'équation sur* $\mathbb{R}_+^*$*, ... et l'on trouve* $x \mapsto Kx^2$ *comme sol.géné*
2. *On résout l'équation sur* $\mathbb{R}_-^*$*, ... et l'on trouve* $x \mapsto Kx^2$ *comme sol.géné*
3. *On étudie le raccordement en* 0

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *de la manière suivante* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} Lx^2 & si\ x < 0 \\ Kx^2 & si\ x > 0 \\ M & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}}$

i) *Etude de la continuité en* 0
On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x \neq 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x \neq 0}} f(x) = 0.$
On en déduit que $\boxed{f \text{ est continue en } 0 \text{ ssi } M = 0.}$
.
. ***Dorénavant, on considère que*** $M = 0$.

ii) *On a* $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{Kx^2}{x} = 0$. *Donc,* $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en 0 avec } f'_d(0) = 0}$

iii) *On a* $\lim\limits_{0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0^-} \dfrac{Lx^2}{x} = 0$. *Donc,* $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en 0 avec } f'_g(0) = 0}$

iv) *On en déduit donc que* $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 avec } f'(0) = 0}$*. (ceci est remarquable : quelles que soient les valeurs de* K *et* L*, c'est à dire quelles que soient les fonctions* f *que l'on considère, la dérivée en 0 existe toujours et a pour valeur 0)*

v) *On a de plus* $0.f'(0) - 2f(0) = 0 \times 0 - 2 \times 0 = 0$*. Donc* (E) *est bien vérifiée sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

Conclusion : les fonctions solutions de (E) *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions* $\boxed{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} Lx^2 & si\ x < 0 \\ Kx^2 & si\ x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}}$

où K *et* L *sont deux constantes réelles quelconques.*
Remarque : toutes les courbes intégrales passent par (0,0) avec une tangente horizontale... mais cela ne remet pas en cause le théorème d'existence et d'unicité à un problème de Cauchy!

exemple 22: structure de l'ensemble des solutions de l'équa.précédente

- Pour tout $(K,L) \in \mathbb{R}^2$ notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f_{K,L} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} Lx^2 & \text{si } x < 0 \\ Kx^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}}$
- On a montré que $\mathcal{S} = \{f_{K,L} | (K,L) \in \mathbb{R}^2\}$
- Considérons plus particulièrement

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f_{1,0} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} f_{0,1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}}$$

- $\boxed{\text{Pour tout } (K,L) \in \mathbb{R}^2 \text{ on a } f_{K,L} = K.f_{1,0} + L.f_{0,1}}$ *en effet:*
  - *si $x < 0$, on a $K.f_{1,0}(x) + L.f_{0,1}(x) = K.0 + L.x^2 = Lx^2 = f_{K,L}(x)$*
  - *si $x \geqslant 0$, on a $K.f_{1,0}(x) + L.f_{0,1}(x) = K.x^2 + L.0 = Kx^2 = f_{K,L}(x)$*

- Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{K.f_{1,0} + L.f_{0,1} | (K,L) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(f_{1,0}\,;\, f_{0,1})}$

- La famille $(f_{1,0}\,;\, f_{0,1})$ est une famille libre.
  En effet, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a.f_{1,0} + b.f_{0,1} = 0$
  ceci signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}, a.f_{1,0}(x) + b.f_{0,1}(x) = 0$
  En particulier pour $x = 1$ cela donne $a.1 + b.0 = 0$
  et pour $x = -1$ cela donne $a.0 + b(-1) = 0$
  On a bien montré que $a = b = 0$
- **Conclusion:** $\boxed{(f_{1,0}\,;\, f_{0,1}) \text{ est une base de } \mathcal{S}}$
  L'ensemble des solutions est ainsi un espace vectoriel de dimension... deux !

exemple 23: Résoudre $xy'+2y=\dfrac{x}{1+x^2}(E)$ sur $\mathbb{R}$.

- **Schéma de l'étude**
  1. Déterminer les solutions sur $]0,+\infty[$
  2. Déterminer les solutions sur $]-\infty,0[$
  3. Résoudre le problème du raccordement en zéro
- **Résolution sur un intervalle $I=]0,+\infty[$ ou $I=]-\infty,0[$**

  Sur cet intervalle, l'équation E équivaut à l'équation $y'+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{1}{1+x^2}$
  - la solution générale de l'équation homogène est $y : x\mapsto K.\exp(-2\ln|x|)=\dfrac{K}{|x|^2}=\dfrac{K}{x^2}$
  - On détermine une solution particulière en utilisant la variation de la constante .

    On pose $y(x)=\dfrac{K(x)}{x^2}$ *pour tout* $x\in I$. *En remplaçant dans l'équation* ...

    $\forall x\in I, K'(x)=\cdots=1-\dfrac{1}{1+x^2}$. *Ce qui donne* $\forall x\in I, K(x)=x-\arctan x+Cste$

    Une solution particulière est donc $y : x\mapsto \dfrac{x-\arctan(x)}{x^2}$
  - La solution générale sur I est donc $\boxed{y : x\mapsto \dfrac{x-\arctan(x)+K}{x^2}}$
- **Problème du recollement**: on considère la fonction
  $$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x-\arctan(x)+A}{x^2} & \text{si } x>0 \\ C & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x-\arctan(x)+B}{x^2} & \text{si } x<0 \end{cases}\end{array}}$$
  - Commençons par rappeler le $DL_3(0)$ de référence $\arctan x = x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$
  - Etude de la continuité en 0.

    $\lim\limits_{0^+} y=\lim\limits_{0^+}\dfrac{x^3/3+o(x^3)+A}{x^2}=\lim\limits_{0^+}\dfrac{x}{3}+o(x)+\dfrac{A}{x^2}=\begin{cases} & \text{si} \\ 0 & \text{si } A=0\end{cases}$

    De même $\lim\limits_{0^-} y=\begin{cases}+\infty & \text{si} \\ 0 & \text{si } B=0 \\ & \text{si}\end{cases}$

    On trouve donc que y est continue en 0 ssi $A=B=C=0$

    On suppose cette égalité vérifiée dans la suite: on a ainsi
    $$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x-\arctan(x)}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}\end{array}}$$
  - Etude de la dérivabilité en 0 (plus besoin de distinguer 0^+ et 0^-)

    On a $\lim\limits_{0}\dfrac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim\limits_{0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{0}\dfrac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{0}\dfrac{1}{3}+o(1)=\dfrac{1}{3}$

    Comme la limite existe et est finie, on en déduit que $\boxed{y \text{ est dérivable en 0, et que } y'(0)=\dfrac{1}{3}}$
  - On vérifie que $0\times y'(0)+2y(0)=\dfrac{0}{1+0^2}$. Ce qui est bien le cas
- Conclusion: <u>il existe une et une seule solution sur $\mathbb{R}$</u> qui est
  $$\boxed{\begin{array}{rcl} y:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x-\arctan(x)}{x^2} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}\end{array}}$$

6 Reconnaître les différentes équations différentielles

exemple 24: identification de l'ennemi!

Dans toutes ces équations, y désigne une fonction inconnue et x une variable réelle

i) $\boxed{2y'' - 4y' + 3y = 0}$ et $\boxed{y'' + 4y' + 4y = 0}$ sont des exemples d'équations différentielles

linéaires, homogènes, du second ordre à coefficients constants.

Dans le paragraphe 3.2, des théorèmes nous

- donnent la solution générale de ces équations
- assure que l'ensemble des solutions est un ev de dimension 2 (sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$)

ii) $\boxed{y' + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}y = 0}$ est un exemple d'équa.diff.

linéaire, homogène, du premier ordre

Dans le paragraphe 2.1, des théorème nous

- donnent la solution générale de cette équation
- assure que l'ensemble des solution est un ev de dimension 1 (sev de $\mathcal{F}(]1,+\infty[,\mathbb{K})$)

iii) $\boxed{(x-2)y' + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}y = 0}$ est un exemple d'équa.diff.

linéaire, homogène, du premier ordre

pour lequel il n'existe aucun théorème à notre programme!

iv) $\boxed{y' + \cos(x)y = \sin x}$ est un exemple d'équa.diff.

linéaire, non homogène, du premier ordre

Dans le paragraphe 2.2, des théorème nous

- donne la solution générale de cette équation
- assure que la solution générale de cette équation s'écrit comme...

v) $\boxed{xy' + (x+3)y = \sin x}$ est une équation différentielle

linéaire, non homogène, du premier ordre

pour lequel il n'existe aucun théorème à notre programme!

vi) $\boxed{y'' + \ln(x)y' + (1-x^2)y = 0}$ est un exemple d'équation différentielle

linéaire, homogène, du second ordre à non coefficients constants.

Dans le paragraphe 3.1, des théorèmes nous

- donnent la solution générale de ces équations
- assure que l'ensemble des solutions est un ev de dimension 2 (sev de $\mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{K})$)

vii) $\boxed{xy'' + (x+3)y = \sin x}$ est une équation différentielle

linéaire, non homogène, du second ordre à coefficients non constants

pour lequel il n'existe aucun théorème à notre programme!

viii) $\boxed{y'' + xy' + (1-x^2)y = \cos(x)}$ est un exemple d'équation différentielle

linéaire, non homogène, du second ordre à non coefficients constants.

Dans le paragraphe 3.1, des résultats nous

- donnent une méthode pour résoudre ces équations dans certains cas
- assurent que la solution générale de cette équation s'écrit comme la somme...

7 Retour sur un théorème d'algèbre linéaire

On revient sur le théorème ci-dessous:

théorème 12: solution d'une équation linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,G)$ et $a \in G$.
On considère l'équation linéaire $f(u) = a$ d'inconnue u

1. L'équation a au moins une solution ssi $a \in \mathrm{Im}(f)$
2. si u_0 est une solution particulière, alors

$$\boxed{u \text{ est solution si et seulement si } u \text{ s'écrit } u = u_0 + v \text{ avec } v \in \ker(f)}$$

c'est à dire que la solution générale d'une équation linéaire est donnée par la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre:
on utilise parfois un abus d'écriture en écrivant que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = u_0 + \ker(f) = \{u_0 + v \,|\, v \in \ker(f)\}$$

exemple 25:

On considère $\boxed{\begin{array}{rcl} \varphi : C^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & C^0(I,\mathbb{K}) \\ y & \longmapsto & y' + a.y \end{array}}$

On note S_H $[\,S\,]$ l'ensemble des solutions de l'équa.diff. $y' + a.y = 0$ $[\,y' + a.y = b\,]$

- Il est clair que φ est une application linéaire: la vérification serait triviale.

- On remarque que $S_H = \ker(\varphi)$.
  Or un théorème d'algèbre linéaire affirme que *le noyau d'une application linéaire est un sev.*
  Nous venons de montrer que S_H est un sev! (mais nous n'avons pas justifié sa dimension)

- Le théorème 5 affirme que la solution générale de l'équa. diff. $y + a.y = b$ s'écrit comme la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière
  (retenons simplement ici que pour toute fonction $b \in C^0(I,\mathbb{K})$ fixée, l'équa.diff $y' + a.y = b$ possède au moins une solution.)

- On en déduit donc que φ est une application surjective, car pour toute application $b \in C^0(I,\mathbb{K})$, l'équation $\varphi(y) = b$ possède au moins une solution.

  En notant f_0 une de ces solutions, le théo 12 ci-dessus affirme que l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(y) = b$ s'écrit $S = f_0 + \ker(\varphi)$,

  on retrouve bien l'égalité $S = f_0 + S_H$!