Analyse: Wallis et série entière

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

Partie I : équivalent des intégrales de Wallis

1. Justifier que pour tout $n \geqslant 0$ on a $W_n > 0$
2. Donner les valeurs de W_0 et de W_1
3. A l'aide d'une intégration par parties dans W_{n+1} , en intégrant $\sin(t)$, montrer que pour $n \geqslant 1, W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$
4. Montrer que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geq 1}$ est constante et déterminer cette constante
5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1, W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, puis en déduire que pour n au voisinage de $+\infty, W_n \sim W_{n-1}$
6. En déduire, enfin, que pour n au voisinage de $+\infty$, on a $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Partie II: étude d'une série entière

Le but de cette partie est de déterminer la nature et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} W_{2n}x^n$ pour x réel

1. Nature.
   (a) Déterminer le rayon R de cette série entière
   (b) Déterminer la nature de cette série pour $x = 1$
   (c) On souhaite déterminer la nature de cette série pour $x = -1$.
   Pour cela, on note pour tout $n \geqslant 0, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} W_{2k}x^k$.
   On considère également les deux suites extraites (T_n) et (U_n) définies par $\forall n \geqslant 0, T_n = S_{2n}$ et $U_n = S_{2n+1}$
      i. Montrer que (T_n) et (U_n) sont deux suites adjacentes
      ii. Justifier que $\sum\limits_{n\geqslant 0} W_{2n}x^n$ converge pour $x = -1$
2. Calcul de la somme :
   Jusqu'à la fin du problème, x désigne un réel fixé de $]-1{,}1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : t \mapsto x^n \sin^{2n}(t)$
   (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(t)$
   (b) Montrer que les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(t)}{1 - x\sin^2(t)}dt$ existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}$
   (d) En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} W_{2k}x^k = I_0$
   (e) Montrer que $I_0 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$.(On pourra s'aider du changement de variable $u = \tan(t)$ puis $v = u\sqrt{1-x}$)
   (f) Après avoir retrouvé le dse de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, justifier que $\forall n \geqslant 0, W_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}.\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{CORRECTION}}$

PARTIE I

1. Soit $n \geqslant 0$ fixé.
La fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est *continue, positive et non identiquement nulle* sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

donc par théorème on peut affirmer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt > 0$

On a bien $\boxed{\forall n \geqslant 0, W_n > 0}$

2. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

3. Pour $n \geqslant 1$, on considère $W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t). \sin(t)dt$
Comme le suggère l'énoncé, nous allons réaliser une intégration par parties.
Les fonctions $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \sin^n(t)dt$ sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,
et l'on a pour tout t dans cet intervalle $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = n\cos(t)\sin^{n-1}(t)$.
D'où

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt \\
&= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^2(t)\sin^{n-1}(t)dt \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\sin^{n-1}(t)dt \\
&= n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt\right) \\
&= n(W_{n-1} - W_{n+1})
\end{aligned}$$

Ainsi $W_{n+1} = n(W_{n-1} - W_{n+1}) = nW_{n-1} - nW_{n+1}$ càd $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}$

Conclusion: $\boxed{\forall n \geqslant 1, W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}}$

4. Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé.
D'après la question 3), on a $nW_{n-1} = (n+1)W_{n+1}$ donc en multipliant chaque membre par W_n cela donne $nW_{n-1}W_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

On a montré que $\forall n \geqslant 1, nW_{n-1}W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$,
càd que la suite $(nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
Le premier terme de cette suite vaut $1.W_0.W_1 = 1.\frac{\pi}{2}.1$

Conclusion $\boxed{\text{la suite } (nW_{n-1}W_n)_{n\geqslant 1} \text{ est la suite constante } \frac{\pi}{2}}$

5. Montrer la double inégalité demandée revient à montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   Soit $n \geqslant 0$.
   Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on a $1 \geqslant \sin(t) \geqslant 0$, et donc $\sin^n(t) \geqslant \sin^{n+1}(t)$
   Par croissance l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)dt$$

   ce qui prouve que $W_n \geq W_{n+1}$.

   On a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, W_n \geqslant W_{n+1}}$ c'est à dire que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}}$$

   En divisant par $W_{n-1} > 0$, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$
   c'est à dire

$$\forall n \geqslant 1, \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$$

   D'après le théorème de convergence par encadrement(ex des gendarmes),
   comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$ ce qui prouve que

$$\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n-1}}$$

6. D'après la question 4, on a $\dfrac{\pi}{2} = nW_{n-1}W_n$ pour tout $n \geqslant 1$,
   d'après la question ci-dessus on obtient $\dfrac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} nW_n^2$ soit encore $\dfrac{\pi}{2n} \underset{+\infty}{\sim} W_n^2$
   Comme $W_n > 0$(précision INDISPENSABLE) d'après la question 1a),
   on en déduit bien que

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

.

Partie II

1. (a) Nous allons déterminer le rayon de la série entière en utilisant la règle de D'Alembert.
   Soit $x \neq 0$ un entier fixé.
   On pose pour tout $n \geqslant 0, u_n = |W_{2n}.x^n| = W_{2n}.|x|^n$
   (le terme u_n ainsi défini est bien strictement positif).
   On a pour tout $n \geqslant 0$ d'après la question I3)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}.|x| = \frac{2n+1}{2n+2}.|x| \longrightarrow |x|$$

   On peut affirmer que
   - si $|x| < 1$ alors la série $\sum W_{2n}.x^n$ est absolument convergente
   - si $|x| > 1$ alors la série $\sum W_{2n}.x^n$ est grossièrement divergente

   On en déduit que $\boxed{R = 1}$

(b) On a $W_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ d'après le I6).

Or $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ qui est de signe stable et la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, donc, d'après la règle des équivalents, on peut affirmer que $\boxed{\text{la série } \sum W_{2n} \text{ diverge}}$

(c) i) • Montrons que (T_n) est une suite décroissante.
Soit $n \geqslant 0$.
On a

$$T_{n+1} - T_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} W_{2k}(-1)^k - \sum_{k=0}^{2n} W_{2k}(-1)^k = W_{4n+4} - W_{4n+2} \leqslant 0$$

car on sait que la suite (W_n) est décroissante (I.(5))

• Montrons que (U_n) est une suite décroissante.
Soit $n \geqslant 0$.
On a

$$U_{n+1} - U_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} W_{2k}(-1)^k - \sum_{k=0}^{2n+1} W_{2k}(-1)^k = -W_{4n+6} + W_{4n+4} \geqslant 0$$

car on sait que la suite (W_n) est décroissante (I.(5))

• Montrons que $\lim U_n - T_n = 0$
Pour tout n on a

$$U_n - T_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} W_{2k}(-1)^k - \sum_{k=0}^{2n} W_{2k}(-1)^k = -W_{4n+2} \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2(4n+2)}}$$

ce qui permet d'affirmer que $\lim U_n - T_n = 0$

• Conclusion: $\boxed{\text{les suites } (U_n) \text{ et } (T_n) \text{ sont adjacentes}}$

ii) Le théorème des suites adjacentes nous affirme que les suites (U_n) et (T_n) convergent vers la même limite.

On a montré que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite, ce qui, par théorème, permet d'affirmer que la suite (S_n) est convergente.

On a ainsi montré que $\boxed{\text{la série } \sum W_{2n}(-1)^n \text{ converge}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.
On reconnait

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} x^k \sin^{2k}(t) = \sum_{k=0}^{n} (x.\sin^2(t))^k$$

est une somme géométrique de raison $x\sin^2(t) \neq 1$ car $|x\sin^2(t)| \leqslant |x| < 1$ par hypothèse, on a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} x^k \sin^{2k}(t) = \frac{1-(x.\sin^2(t))^{n+1}}{1-x\sin^2 t} = \frac{1-f_{n+1}(t)}{1-x\sin^2(t)}}$$

(b) On a déjà vu que pour tout t réel, on a $|x\sin^2(t)| < |x| < 1$,
On peut donc affirmer en particulier que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], 1 - x.\sin^2(t) \neq 0$
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^{2n}(t)}{1 - x\sin^2(t)}$ est ainsi définie et continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, (comme quotient de fonctions continues le dénominateur ne s'annulant pas); on peut donc affirmer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(t)}{1 - x\sin^2(t)}dt$ existe, car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.(ce n'est même pas une intégrale généralisée)

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} W_{2k}x^k &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(t)dt.x^k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} x^k.\sin^{2k}(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n} f_k(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - f_{n+1}(t)}{1 - x\sin^2(t)}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_{n+1}(t)}{1 - x\sin^2(t)}dt = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}\end{aligned}$$

On a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, \sum_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}}$

(d)
- Commençons par montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
  On a
  $$0 \leqslant \sin^{2n+2}(t) \leqslant 1$$
  En divisant par $1 - x\sin^2(t)$ qui est strictement positif (cf 2(a) ou 2(b)), on obtient
  $$0 \leqslant \frac{\sin^{2n+2}(t)}{1 - x\sin^2(t)} \leqslant \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}$$
  On a ainsi prouvé que
  $$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leqslant \frac{\sin^{2n+2}(t)}{1 - x\sin^2(t)} \leqslant \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}$$
  Grâce à la croissance de l'intégrale on obtient
  $$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n+2}(t)}{1 - x\sin^2(t)}dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}dt$$
  On vient de justifier que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_0}$

- Comme $|x| < 1$ on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$.
  On peut en déduire alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}.I_{n+1} = 0$
  comme produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers zéro.

- Comme pour tout entier n on a $\sum\limits_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0 - x^{n+1}I_{n+1}$
  et que l'on vient de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}.I_{n+1} = 0$,
  on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} W_{2k}x^k = I_0$.

  On vient de prouver que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} W_{2k}x^k$ convergeait pour tout $x \in]-1,+1[$ (ce que l'on savait déjà) et que

$$\boxed{\forall x \in]-1,+1[,\ \sum_{k=0}^{\infty} W_{2k}x^k = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}dt}$$

(e) Pour tout $T \in [0,\frac{\pi}{2}[$, on considère $F(T) = \int_0^T \dfrac{dt}{1-x.\sin^2(t)}$
On effectue le changement de variable $t \mapsto \tan t = u$ qui est bien de classe C^1 sur $[0,T]$.
On a

$$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)} \quad \text{et} \quad du = (1+\tan^2 t)dt = (1+u^2)dt$$

On obtient ainsi

$$F(T) = \int_0^{\tan T} \frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{1 - x.\dfrac{u^2}{1+u^2}} = \int_0^{\tan T} \frac{du}{1+(1-x)u^2} = \int_0^{\tan T} \frac{du}{1+(\sqrt{1-x}.u)^2} \qquad \text{car } 1-x>0$$

On effectue le changement de variable affine $v = \sqrt{1-x}.u$ (et donc $dv = \sqrt{1-x}du$),
et on obtient

$$F(T) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^{\sqrt{1-x}.\tan T} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} [\arctan v]_0^{\sqrt{1-x}.\tan T}$$

En faisant tendre $T \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}^-$, on obtient $\lim\limits_{T\to\frac{\pi}{2}^-} F(T) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}.\dfrac{\pi}{2}$.
On vient de prouver que

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}}$$

(f) Dans le cours sur les séries entières, on a vu en exemple important le dse $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ en utilisant la formule de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.(IL FAUT SAVOIR REFAIRE CET EXEMPLE).

On avait trouvé que $\forall x \in]-1,+1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$
On sait donc que

$$\forall x \in]-1,+1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\pi}.I_0 = \frac{2}{\pi}.\sum_{n=0}^{\infty} W_{2n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}.W_{2n}x^n$$

<u>L'unicité du dse</u> nous permet d'affirmer que $\forall n \geqslant 0,\ \dfrac{2}{\pi}.W_{2n} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ cqfd!