EXERCICE: SERIES ENTIERES 1

Soit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ et $\forall n \geqslant 2, (n+1)a_{n+1} = na_n + \dfrac{1}{2}a_{n-2}$.

On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$ et on note $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sa somme.

1. Montrer que pour tout entier n, on a $a_n \in [0{,}1]$
2. Montrer la suite $(na_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante
3. Déterminer le rayon R
4. Montrer que S est solution de l'équation différentielle $(x-1)y' + \dfrac{x^2}{2}y = 0$ sur l'intervalle $]-1,+1[$
5. En déduire S.

$$\boxed{\text{CORRECTION}}$$

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}_n \, : \, 0 \leqslant a_n \leqslant 1$

   Nous allons faire une récurrence forte pour montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n

   - **Initialisation:** $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont bien vraies!

   - **Hérédité**: *Supposons les propositions $\mathcal{P}_k$ vraies **jusqu'à** un rang $n \geqslant 2$ fixé quelconque, et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie*
     i) Comme par hypothèse de récurrence on a $a_n \geqslant 0$ et $a_{n-2} \geqslant 0$,
     on peut affirmer que $na_n + \dfrac{1}{2}a_{n-2} \geqslant 0$ (car la produit et la somme de nombres positifs sont encore des nombres positifs): on vient de prouver que $(n+1)a_{n+1} \geqslant 0$.
     Et comme $n+1 > 0$ on a forcément $a_{n+1} \geqslant 0$!
     ii) Comme par hypothèse de récurrence, on a $a_{n-2} \leqslant 1$ et $a_n \leqslant 1$, on en déduit que

     $$(n+1)a_{n+1} = n.a_n + \frac{1}{2}a_{n-2} \leqslant n + \frac{1}{2} < n+1$$

     Ce qui donne bien $a_{n+1} \leqslant 1$
     iii) On a ainsi montré que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 1$, c'est à dire que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie
   - **Conclusion:** par le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0{,}1]}$

2. Nous allons montrer, sans récurrence, que $\forall n \geqslant 0, (n+1)a_{n+1} - n.a_n \geqslant 0$
   i) pour $n = 0$, c'est bien le cas car $1.a_1 - 0.a_0 = 0 - 0 \geqslant 0$
   ii) pour $n = 1$, c'est bien le cas car $2.a_2 - 1.a_1 = 0 - 0 \geqslant 0$
   iii) Soit $n \geqslant 2$,
   on a

   $$(n+1).a_{n+1} - n.a_n = \frac{a_{n-2}}{2} \geqslant 0$$

   (car d'après la première question on a $a_{n-2} \in [0{,}1]$)

   On a bien montré que $\forall n \geqslant 0, (n+1)a_{n+1} - n.a_n \geqslant 0$

   C'est à dire que $\boxed{\text{la suite } (n.a_n) \text{ est croissante}}$

3. Notons R le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$

   - On a pour tout entier $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, donc d'après le théorème 8, on peut affirmer que

     $$Rayon(\sum a_n x^n) \geqslant Rayon(\sum x^n)$$

     Or cette SE est de référence et l'on sait que son rayon vaut un.

     On a déjà montré que $\boxed{R \geqslant 1}$

- On a d'après la définition $3a_3 = 2a_2 + \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}$.
  D'après la question précédente on sait que la suite (a_n) est croissante: on peut donc affirmer que $\forall n \geqslant 3, n.a_n \geqslant 3.a_3 = \frac{1}{2}$ On sait ainsi que
  $$\forall n \geqslant 3, a_n \geqslant \frac{1}{2n} \geqslant 0$$
  En utilisant le même théorème 8, on peut en déduire que $Rayon(\sum a_n x^n) \leqslant Rayon(\sum \frac{x^n}{2.n})$
  Or on sait que $Rayon(\sum \frac{x^n}{2.n}) = Rayon(\sum \frac{x^n}{n})$ car *multiplier une série entière par un scalaire non nul ne change pas le rayon*, et l'on sait aussi que $Rayon(\sum \frac{x^n}{n}) = 1$ car c'est un série entière de référence,
  on a ainsi prouvé que e $\boxed{R \leqslant 1}$
- Au final, on a montré que $\boxed{R = 1}$

4. **Par théorème, on sait que S est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert $]-R, +R[=]-1, +1[$ et que la dérivée est obtenue par dérivation terme à terme.**

   On a ainsi
   $$\forall x \in]-1, +1[, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1}$$
   Soit $x \in]-1, +1[$.
   On a
   $$\begin{aligned}(x-1)S'(x) + \frac{x^2}{2}S(x) &= (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} + \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^{n+2}\end{aligned}$$
   On effectue le décalage d'indice $n \leftarrow n-1$ dans le deuxième somme et $n \leftarrow n+2$ dans la troisième, ce qui donne
   $$(x-1)S'(x) + \frac{x^2}{2}S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}.x^n$$
   Or
   $$\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n = 1.a_1.x + \sum_{n=2}^{\infty} n.a_n.x^n = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} n.a_n.x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n.a_n.x^n$$
   et
   $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n = \underbrace{1.a_1 + 2.a_2.x}_{=0+0=0} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n = \sum_{n=2}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(x-1)S'(x)+\frac{x^2}{2}S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}.x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n.a_n.x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}.x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left[n.a_n-(n+1).a_{n+1}+\frac{1}{2}a_{n-2}\right].x^n\end{aligned}$$

Or par définition, on a $\forall n \geqslant 2, n.a_n-(n+1).a_{n+1}+\frac{1}{2}a_{n-2}=0$ (!)

On vient de prouver que

$$\forall x \in]-1,+1[, (x-1)S'(x)+\frac{x^2}{2}S(x)=0$$

C-à-d que $\boxed{\text{la fonction } S \text{ vérifie l'équation différentielle } (x-1)y'+\frac{x^2}{2}y=0 \text{ sur l'intervalle }]-1,+1[}$

5.
- On résout l'équation différentielle $y'+\dfrac{x^2}{2(x-1)}y=0$ sur l'intervalle $]-1,+1[$.
  On commence par une recherche de primitive

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{2(x-1)}dx &= \int \frac{1}{2}\frac{x^2-1+1}{x-1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int x+1+\frac{1}{x-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right)+cste\end{aligned}$$

  La solution générale de l'équation différentielle sur $]-1,+1[$ est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll} y:]-1,+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K.(1-x)^{-1/2}.\exp\left(\dfrac{-2x-x^2}{4}\right)\end{array} \quad \text{avec } K\in\mathbb{R}}$$

- Comme $S(0)=a_0=1$ on a donc $K=1$

  Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-1,+1[, S(x)=\frac{\exp\left(\dfrac{2x-x^2}{4}\right)}{\sqrt{1-x}}}$$