EXERCICES: SERIES ENTIERES 2

Premier exercice

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de réels définies par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$ la relation

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k.a_{n-k}$$

1. Calculer a_2 et a_3
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $0 < a_n \leqslant n!$
3. Justifier que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}.x^n$ possède un rayon R supérieur ou égal à un.
4. Pour $x \in]-R, +R[$ on note $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}.x^n$
   (a) Montrer que pour tout $x \in]-R, +R[$, on a $S^2(x) = 1 + 2.\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}.x^n$
   (b) Montrer que pour tout $x \in]-R, +R[$, on a $S'(x) = \frac{1}{2}(1 + S^2(x))$
   (c) Pour tout $x \in]-R, +R[$, on pose $u(x) = \arctan(S(x))$.
   Déterminer $u(x)$ puis $S(x)$ pour tout $x \in]-R, +R[$
5. Justifier que $R \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Second exercice

Pour tout $n \geqslant 0$ on note $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$ et on considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$

1. Calculer a_0
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$
3. Justifier que le rayon de la série entière est supérieure ou égal à 2
4. Lorsque $|x| < 2$, on note $S_n(x)$ la somme partielle d'indice n de la série .
   (a) Justifier que $S_n(x) = \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} - \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} dt$
   (b) On note $R_n(x) = \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} dt$.
   Montrer avec soin que $0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1}.\int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2}$
   (c) En déduire la somme $S(x)$
5. Justifier que $R = 2$

$\boxed{\text{CORRECTION}}$

Premier exercice:

1. $\boxed{a_2 = 1 \text{ et } a_3 = 2}$

2. Nous allons montrer le résultat demandé en effectuant **une récurrence forte.**
Pour tout $p \geqslant 0$ on note la proposition $\mathcal{P}_p$: "$0 < a_p \leqslant p!$"
   - **Initialisation:**
   Il est clair que $\mathcal{P}_0$ est vraie (ainsi que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$)

   - **Hérédité:** Supposons la proposition $\mathcal{P}_k$ vraie **jusqu' à** un rang $n \geqslant 1$ fixé quelconque.
   D'après cette supposition, on sait que $0 < a_k \leqslant k!$ et $0 < a_{n-k} \leqslant (n-k)!$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
   On a donc l'encadrement
   $$0 < a_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k.a_{n-k} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!(n-k)! = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}n! = \frac{(n+1)}{2}n! = \frac{(n+1)!}{2} \leqslant (n+1)!$$
   Ce qui prouve que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

   - **Conclusion:**
   Par le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \geqslant 0, 0 \leqslant a_n \leqslant n!}$

3. De la question précédente, on en déduit que $\left|\dfrac{a_n}{n!}\right| \leqslant 1$ ce qui nous permet d'affirmer par théorème (8) que $Rayon(\sum \frac{a_n}{n!}) \geqslant Rayon(\sum x_n)$
Or on sait que $Rayon(\sum x_n) = 1$ (c'est une SE de référence!).

   On a bien justifié que $\boxed{Rayon(\sum \frac{a_n}{n!}) \geqslant 1}$

4. (a) Pour établir cette formule nous allons réaliser le produit de Cauchy de la SE $\sum \dfrac{a_n}{n!}$ par elle-même.
Notons $\sum c_n x^n$ le produit de Cauchy de la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!}$ par elle-même.
Par définition, on a
$$\forall n \geqslant 0, c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}.\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}$$
ce qui donne ici
   i) pour $n = 0$: $c_0 = a_0^2 = 1$

   ii) pour $n \geqslant 1$: $c_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a_k.a_{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k.a_{n-k} = \frac{2.a_{n+1}}{n!}$

   Par théorème on sait que
   i) $Rayon(\sum c_n x^n) \geqslant R$
   ii) pour tout x tel que $|x| < Rayon(\sum c_n x^n)$, on a
   $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\right) = S^2(x)$$
   Et l'on a vu que
   $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}x^n$$

En résumé, on a bien prouvé que

$$\boxed{\forall x \in]-R,+R[, S^2(x) = 1 + 2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}.x^n}$$

(b) Le théorème de dérivation des séries entières nous permet d'affirmer que

i. S est C^∞ sur $]-R,+R[$

ii. S' est donné par dérivation terme à terme sur cet intervalle

Ainsi, pour $x \in]-R,+R[$ on a

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n!}.x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.a_n}{n!}.x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}.x^{n-1}$$

Un changement d'indice judicieux dans cette dernière somme permet de trouver

$$\boxed{\forall x \in]-R,+R[, S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}.x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}.x^n}$$

A l'aide des deux égalités encadrées ci-dessus, on aboutit bien

$$\boxed{\forall x \in]-R,+R[, S'(x) = \frac{1}{2}(1 + S^2(x))}$$

(c) On définit $\boxed{\begin{array}{rcl} u :]-R,+R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(S(x)) \end{array}}$

– u est de classe C^∞ sur $]-R,+R[$ comme composée de fonctions de classe C^∞

– pour tout $x \in]-R,+R[$ on a

$$u'(x) = \frac{S'(x)}{1 + S^2(x)} = \frac{1}{2}$$

On peut donc affirmer qu'il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in]-R,+R[, u(x) = \frac{x}{2} + C$$

Comme $S(0) = 1$, on a $C = u(0) = \arctan(S(0)) = \dfrac{\pi}{4}$
ainsi

$$\forall x \in]-R,+R[, u(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Réfléchissons un instant à ce que nous venons de prouver, à savoir

$$\forall x \in]-R,+R[, \arctan(S(x)) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$$

i. Comme la fonction arctan est à valeurs dans $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, ceci implique que pour tout $x \in]-R,+R[$ on a forcément $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$

ii. Dire que pour tout $x < R$ on a $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, implique que $\dfrac{R}{2} + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ càd $R \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

iii. Dire que pour tout $-R < x$ on a $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$, implique que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{-R}{2} + \frac{\pi}{4}$ càd $R \leqslant \frac{3\pi}{2}$

iv. On vient donc de justifier ici que $\boxed{R \leqslant \frac{\pi}{2}}$! (ce qui rend la dernière question caduc!)

– En composant par la fonction tan cela donne

$$\boxed{\forall x \in]-R, +R[, S(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Deuxième exercice:

On pose pour tout n entier $a_n = \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}$

1. $a_0 = \int_0^1 \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\frac{t}{\sqrt{2}})\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Soit $n \geqslant 0$.
   Pour tout $t \in [0,1]$ on a

   $$0 \leqslant \frac{1}{(2+t^2)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

   Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

   $$\int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2^{n+1}}dt$$

   c'est à dire

   $$\boxed{0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}}$$

3. Ici, on propose deux solutions!
   i) Pour tout $r \in [0,2]$, on a

   $$0 \leqslant a^n r^n \leqslant \frac{1}{2}\frac{r^n}{2^n} \leqslant \frac{1}{2}$$

   Ainsi la suite $(|a_n|r^n)_n$ est majorée pour tout $r \in [0,2]$,
   on en déduit **par définition du rayon** que $\boxed{R \geqslant 2}$

   ii) On utilise le théorème 8.
   Pour tout n on a

   $$|a_n| \leqslant \frac{1}{2^n+1}$$

   On peut donc affirmer que

   $$Rayon(\sum a_n x^n) \geqslant Rayon(\sum \frac{x^n}{2^{n+1}})$$

   Or la série $\sum \frac{x^n}{2^{n+1}}$ est une série géométrique de raison $\frac{x}{2}$ qui a donc son rayon égal à 2.
   On retrouve bien $\boxed{Rayon(\sum a_n x^n) \geqslant 2}$

4. Soit x un réel tel que $|x| < 2$, et n un entier positif. Notons $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

   (a) – Grâce à la linéarité de l'intégrale, on a

   $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(\int_0^1 \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}x^n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{dt}{(2+t^2)^{n+1}}x^n$$

   – En reconnaissant une somme géométrique:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2+t^2)^{k+1}} = \frac{1}{2+t^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{(2+t^2)^k} = \frac{1}{2+t^2}.\frac{1-\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{2+t^2}} = \frac{1}{2-x+t^2}\Bigg(1-\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n-}$$

Cela nous donne

$$S_n(x) = \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2} - \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} dt = \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} - \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1}$$

(b) En notant $R_n(x) = \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} dt$ l'égalité précédente s'écrit

$$S_n(x) = \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} - R_n(x) \quad (*)$$

$\boxed{\text{Dans la suite nous allons calculer cette première intégrale et montrer que } \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0}$

Pour x tel que $|x| < 2$ on a $2 - x > 0$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{2-x})^2+t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2-x}}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2-x}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2-x}}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2-x}}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2-x}}\right)\right]_0^1\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2-x}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)}$$

– On s'intéresse à $R_n(x)$.
A l'aide d'un encadrement on va montrer que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
Il se serait tentant d'écrire que:
Pour tout $t \in [0,1]$ on a $\quad 0 \leqslant \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{x}{2+t^2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$
Mais ceci est faux lorsque n pair et $x < 0$!
Nous allons donc nécessairement avoir recours à des valeurs absolues.
Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$0 \leqslant \left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1}$$

Et donc en multipliant par la quantité positive $\frac{1}{2-x+t^2}$ chaque membre on obtient:

$$0 \leqslant \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1}$$

Ce qui donne par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1} dt = \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2}$$

Dans le cours d'intégration de première année on a vu que pour une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ on a $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
On peut donc ici appliquer ce résultat pour écrire que

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} dt\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} dt$$

Par transitivité on obtient que

$$0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant \left|\int_0^1 \frac{1}{2-x+t^2}\left(\frac{|x|}{2+t^2}\right)^{n+1} dt\right| \leqslant \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{2-x+t^2}$$

Comme $\int_0^1 \dfrac{dt}{2-x+t^2}$ est une constante indépendante de n et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+1} = 0$ (car $|x| < 2$ et donc $\dfrac{|x|}{2} < 1$) on peut affirmer d'après le théorème de convergence par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

– En reprenant $(*)$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^1 \dfrac{dt}{2-x+t^2}}$

5. A la question précédente on a montré que $\boxed{\forall x \in]-2,+2[, S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right)}$

Ici, il ne vaudrait pas dire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$ n'étant pas définie pour $x = 2$ on en déduit que $R = 2$!
En effet, la formule précédente a été établie pour $x \in]-2,2[$ et donc on ne peut s'en servir pour des valeurs hors de cet intervalle!

On sait déjà que $R \geqslant 2$.

Nous allons montrer par l'absurde que $R = 2$.
Pour cela on suppose $R > 2$.
Si $R > 2$, on sait par théorème que la fonction somme S est continue sur $]-R,+R[$,
elle serait donc nécessairement continue en 2. On devrait avoir ainsi $\lim\limits_{x\to 2^-} S(x) = S(2)$ (valeur finie).
Or $\lim\limits_{x\to 2^-} S(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right) = +\infty$ (Contradiction.)
$\boxed{\text{Conclusion : } R = 2}$