Géométrie plane: révisions de 1ère année

Serge Lemarquis

Table des matières

- Dans tout ce polycopié, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$.
- $\boxed{\text{det}}$ représente le produit mixte vu en première année (c'est aussi le déterminant!)

1 Points et vecteurs: convention dans un espace affine

Soient les points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, les vecteurs $\vec{u} = (u_1,u_2)$ et $\vec{u}' = (u'_1,u'_2)$, et le réel α.

i) $\vec{u} + \vec{u}'$ désigne le vecteur de coordonnées $(u_1 + u'_1,u_2 + u'_2)$
ii) $\alpha\vec{u}$ désigne le vecteur de coordonnées $(\alpha u'_1,\alpha u'_2)$
iii) $A + \vec{u}$ désigne le point de cordonnées $(x_A + u_1,y_A + u_2)$
iv) $A + B$ désigne le point de coordonnées $(x_A + x_B,y_A + y_B)$
v) $A - B$ désigne le vecteur $\overrightarrow{BA}$ de coordonnées $(x_A - x_B,y_A - y_B)$
vi) $\dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B$ désigne le milieu du segment $[AB]$

2 Les outils

Soient les points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, et les vecteurs $\vec{u}=(u_1,u_2)$ et $\vec{v}=(v_1,v_2)$

- le déterminant: il sert à caractériser la colinéarité de deux vecteurs.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Longleftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

- le produit scalaire: il sert à caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Longleftrightarrow < \vec{u},\vec{v} > = u_1.v_1 + u_2.v_2 = 0$$

- la norme: elle donne "la longueur" d'un vecteur

$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{< \vec{u},\vec{u} >}$$

- la distance: elle donne "la longueur" entre deux points

$$d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

3 Droites parallèles, perpendiculaires

- toute droite du plan admet une équation cartésienne du type $\boxed{ux + vy + w = 0 \text{ avec } (u,v) \neq (0,0)}$:
  - un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
  - deux droites sont parallèles ssi $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$
  - deux droites sont perpendiculaires ssi $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ *(produit scalaire)*
- toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées possède une éq. cart. réduite du type $y = mx + p$:
  - un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$
  - deux droites sont parallèles ssi $m_1 = m_2$
  - deux droites sont perpendiculaires ssi $m_1.m_2 = -1$

4 Equation cartésienne de droite

Pour écrire l'équation d'une droite, on a besoin d'un point et de sa direction.

méthode 1: éq. cart. d'une droite (D) connaissant un point $A(x_A,y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{d}=(d_1,d_2)$

Soit M le point de coordonnées génériques (x,y). On a les équivalences :

$$\boxed{M(x,y)\in(D) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{d} \text{ sont colinéaires } \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{d})=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & d_1 \\ y-y_A & d_2 \end{vmatrix}=0}$$

et donc on a comme équation $\boxed{d_2(x-x_A)-d_1(y-y_A)=0}$

Pour écrire l'équation cartésienne de la droite, on écrit directement le déterminant!

Exemple:

Donner l'équation de la droite passant par $A(1,-2)$ et de vecteur directeur $\vec{d}=(3,-2)$.

Directement! On écrit que l'équation est $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y+2 & -2 \end{vmatrix}=0$ *soit* $2x+3y+4=0$

On peut ensuite, si nécessaire, mais c'est rarement le cas, écrire l'équation cartésienne réduite de la droite en 'isolant' y, ce qui donne ici $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}$

exemple 1: écrire éq cartésiennne d'une droite passant par deux points

Donner l'équation de la droite passant par les points $A(1,-2)$ et $B(2,3)$

Solution:

La droite (AB) est la droite qui passe par le point $A(1,-2)$

et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}=(2-1,3-(-2))=(1,5)$.

Son équation est donc $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y+2 & 5 \end{vmatrix}=0$ *soit* $5x-y-7=0$

méthode 2: éq. cart. d'une droite (D) connaissant un point $A(x_A,y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{d}=(d_1,d_2)$

On sait qu'un vecteur normal sera alors le vecteur $(-d_2,d_1)$

et donc l'équation sera de la forme $-d_2x+d_1y+w=0$

Ensuite on détermine w en disant que le point $A(x_A,y_A)$ appartient à la droite

et donc que $-d_2x_A+d_1y_A+w=0$, on trouve donc en remplaçant w que l'équation de la droite est $-d_2x+d_1y+d_2x_A-d_1y_A=0$

(cette méthode est plus longue, plus lourde: on privilégiera donc la précédente!)

méthode 3: équ. cart. d'une droite (D) connaissant un point $A(x_A,y_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}=(n_1,n_2)$

Soit M le point de coordonnées génériques (x,y). On a les équivalences :

$$\boxed{M(x,y)\in(D) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux } \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}=0}$$

et donc on a comme équation $\boxed{n_1(x-x_A)+n_2(y-y_A)=0}$

Pour écrire l'équation de la droite, on écrit directement le produit scalaire!

Exemple:

Donner l'équation de la droite passant par $A(1,-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}=(1,2)$

Directement! On écrit que l'équation est $\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=0$, *soit* $x+2y+3=0$

5 Equation paramétrique d'une droite

méthode 4: éq. paramétrique. d'une droite (D) connaissant un point $A(x_A,y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{d} = (d_1,d_2)$

Soit M le point de coordonnées génériques (x,y). On a les équivalences :

$$\boxed{M(x,y) \in (D) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{d} \text{ sont colinéaires } \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{d} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= x_A + t.d_1 \\ y &= y_A + t.d_2 \end{cases}}$$

Pour écrire l'équation paramétrique, on écrit directement $\boxed{\begin{cases} x &= x_A + t.d_1 \\ y &= y_A + t.d_2 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$

Exemple:
Donner une équation paramétrique de la droite passant par $A(1,-2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (3,-2)$.
Directement, on écrit que c'est $\begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= -2 - 2t \end{cases}$ *avec $t \in \mathbb{R}$*
remarque: à partir de cette représentation paramétrique, si l'on désire une équation cartésienne, il suffit d'éliminer le paramètre t.
ici, on a $t = -\frac{y}{2} + 1$ et donc $x = 1 + 3(-\frac{y}{2} + 1)$, ce qui donne $2x + 3y + 4 = 0$

méthode 5: éq paramétrique d'une droite à partir de son éq. cartésienne

Soit D la droite d'équation $4x + 2y + 1 = 0$
Il suffit par exemple de poser $x = t$, et l'on obtient $\begin{cases} x &= t \\ y &= -2t - \frac{1}{2} \end{cases}$ *avec $t \in \mathbb{R}$*
On peut aussi:

- *dire que $(4,2)$ est un vecteur normal, donc $(-2,4)$ est un vecteur directeur*
- *remarquer que $(0,-1/2)$ est un point de la droite*
- *puis écrire la représentation paramétrique* $\begin{cases} x &= 0 - 2t \\ y &= -1/2 + 4t \end{cases}$ *avec $t \in \mathbb{R}$*

6 Formules

théorème 1: aire d'un triangle

l'aire du triangle ABC est donnée par la formule $\boxed{\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{2}.AB.AC.|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})|}$

théorème 2: distance entre un point et une droite

la distance d'un point $M_0(x_0,y_0)$ à la droite d'équation $(D) : ux + vy + w = 0$ est donnée par la formule $\boxed{\frac{|ux_0 + vy_0 + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}} = d(M_0,(D))}$

7 Projeté orthogonal sur une droite

méthode 6: détermination du projeté orthogonal grâce à une formule

Soit D la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{d}$
Soit B un point du plan.
Le projeté orthogonal du point B sur la droite D est le point H
qui vérifie $\boxed{\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{d}}{||\vec{d}||^2}.\vec{d}}$ càd $H = A + \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{d}}{||\vec{d}||^2}.\vec{d}$ *(faire un dessin)*

Exemple:
Soit D la droite passant par le point $A(2{,}1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d} = (2, -1)$.
Déterminer le projeté orthogonal du point $B(0{,}3)$ sur cette droite.
Il suffit d'appliquer la formule!

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{d}}{||\vec{d}||^2}\vec{d} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}{2^2+(-1)^2}.(2,-1) = \frac{-6}{5}.(2,-1)$$

et donc $H = A + \dfrac{-6}{5}.(2,-1) = (2{,}1) + \dfrac{-6}{5}.(2,-1) = (\dfrac{-2}{5}, \dfrac{11}{5})$

méthode 7: détermination du projeté orthogonal sans formule

Soit D la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{d}$
Soit B un point du plan.
Le projeté orthogonal du point B sur la droite D est le point H qui est à l'intersection de la droite D et de la perpendiculaire à D passant par A.
On écrit l'équation de la normale(=la perpendiculaire) à D passant par A, puis on détermine l'intersection des deux droites en écrivant un système. (faire un dessin)

Exemple:
Soit D la droite passant par le point $A(2{,}1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{d} = (2, -1)$.
Déterminer le projeté orthogonal du point $B(0{,}3)$ sur cette droite.

- *La droite perpendiculaire à (D) et passant par B est la droite qui passe par le point $B(0{,}3)$ et de vecteur normal $(2, -1)$. Son équation est donc* $\begin{pmatrix}x-0\\y-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 0$, *soit* $2x - y + 3 = 0$
- *La droite D a pour équation* $\begin{vmatrix}x-2 & 2\\ y-1 & -1\end{vmatrix} = 0$ *soit* $x + 2y - 4 = 0$
- *Le point H appartient à l'intersection des deux droites précédents;*
  ses coordonnées vérifient donc le système $\begin{cases}2x - y + 3 &= 0\\ x + 2y - 4 &= 0\end{cases}$
  La résolution donne bien là aussi $(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{11}{5})$

8 Cercles

méthode 8: équations de cercle

le cercle de centre $\Omega(x_0,y_0)$ et de rayon R a pour équation cartésienne $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2}$

et pour représentation paramétrique $\boxed{\begin{cases} x &= x_0 + R.\cos t \\ y &= y_0 + R.\sin t \end{cases} \text{ avec } t \in [0,2\pi] \text{ ou } [-\pi,\pi]}$

méthode 9: cercle vu comme une courbe du second de degré particulière

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fixé.

La courbe d'équation $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ est $\begin{cases} \text{soit un cercle} \\ \text{soit un point} \\ \text{soit l'ensemble vide} \end{cases}$

On met sous forme canonique la partie en x et celle en y pour commencer:

$$x^2+2ax=(x+a)^2-a^2 \quad \text{et} \quad y^2+2by=(y+b)^2-b^2$$

et ainsi l'équation de la courbe devient $\boxed{(x+a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2-c}$

- si $a^2+b^2-c>0$, on a le cercle de centre $(-a,-b)$ et de rayon $\sqrt{a^2+b^2-c}$
- si $a^2+b^2-c=0$, la courbe est réduite à un point : $(-a,-b)$
- si $a^2+b^2-c<0$, c'est l'ensemble vide.

théorème 3: cercle défini par un de ses diamètres

Soient A et B deux points.

Un point M est sur le cercle de diamètre $[A,B]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

théorème 4: position relative d'une cercle et d'une droite

Soit C un cercle de centre Ω et de rayon R.

Soit D une droite

- si $d(\Omega,D)>R$ alors C et D ne s'intersectent pas
- si $d(\Omega,D)<R$ alors C et D s'intersectent en deux points distincts
- si $d(\Omega,D)=R$ alors $\begin{cases} C \text{ et } D \text{ s'intersectent en un unique point } K \\ D \text{ est tangent à } C \text{ au point } K \end{cases}$

9 Changement de repère

9.1 changement d'origine uniquement

- Soit $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé: on note (x,y) les coordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(x,y) \text{ dans } \mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j}) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \iff M = O + x\vec{i} + y\vec{j}}$$

- Soit Ω un point du plan, notons (x_Ω,y_Ω) ses cordonnées dans $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$

$$\text{On a donc } \boxed{\overrightarrow{O\Omega} = x_\Omega\vec{i} + y_\Omega\vec{j}}$$

- Soit $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ un autre repère: on note (X,Y) les coordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(X,Y) \text{ dans } (\Omega,\vec{i},\vec{j}) \iff \overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j} \iff M = \Omega + X\vec{i} + Y\vec{j}}$$

- grâce à la relation de Chasles, on peut écire que $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$

  ce qui donne $X\vec{i} + Y\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j} - x_\Omega\vec{i} - y_\Omega\vec{j}$, en identifiant, on trouve $\boxed{\begin{cases} X &= x - x_\Omega \\ Y &= y - y_\Omega \end{cases}}$
- La formule ci-dessus est la formule du changement de repère lorsque l'on garde la même base: on retiendra qu'il ne s'agit que de faire un "décalage"(translation) sur les coordonnées

9.2 changement de base uniquement

- Soit $\mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé: on note (x,y) les coordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(x,y) \text{ dans } \mathcal{R}(0,\vec{i},\vec{j}) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \iff M = O + x\vec{i} + y\vec{j}}$$

- Soit $(\vec{I},\vec{J})$ une base de $\mathbb{R}^2$,
  notons (x_I,y_I) [respt (x_J,y_J)] les composantes de $\vec{I}$ [respt $\vec{J}$] dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

$$\boxed{\vec{I} = x_I\vec{i} + y_I\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{J} = x_J\vec{i} + y_J\vec{j}}$$

- Soit $(O,\vec{I},\vec{J})$ un autre repère: on note (X,Y) les cordonnées dans ce repère.

$$\boxed{M(X,Y) \text{ dans } (O,\vec{I},\vec{J}) \iff \overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J} \iff M = O + X\vec{I} + Y\vec{J}}$$

- on a ainsi
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{I} + Y\vec{J} = X.(x_I\vec{i} + y_I\vec{j}) + Y.(x_J\vec{i} + y_J\vec{j})$$
  en identifiant, on trouve donc
$$x = x_I.X + x_J.Y \quad \text{et} \quad y = y_I.X + y_J.Y \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I & x_J \\ y_I & y_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

- Comme on pouvait s'y attendre, lorsque l'on effectue un changement de repère en gardant la même origine, on retrouve la formule de changement de base pour les vecteurs avec la matrice de passage.
- Lorsque <u>le changement de base s'effectue d'une bon vers une autre bon, on sait que la matrice de passage est orthogonale</u>: son inverse est donc simplement sa transposée (pratique pour les calculs)

10 Exemples

exemple 2:

On considére la courbe C d'équation $x^2 - 3x + y^2 + 5y = \frac{-13}{2}$

et la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Reconnaître la nature de C et donner ses éléments géométriques.
2. Montrer que D est tangente à C et déterminer le point de tangence

Solution:

1. *On met sous forme canonique la partie en x et celle en y.*
   On a $x^2 - 3x = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$ *et* $y^2 + 5y = (y + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$
   L'équation s'écrit donc $(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} = \frac{-13}{2}$, *soit* $\boxed{(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = 2}$
   On reconnait le cercle de centre $\Omega(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2})$ *et de rayon* $R = \sqrt{2}$
2. *On sait qu'une droite est tangente à un cercle ssi leur intersection est réduite à un point.*
   On considère donc le système $\begin{cases} x^2 - 3x + y^2 + 5y &= \frac{-13}{2} \\ x &= t \\ y &= 1 - t \end{cases}$
   qui équivaut à $\begin{cases} 2t^2 - 10t + \frac{25}{2} &= 0 \\ x &= t \\ y &= 1 - t \end{cases}$.
   Or l'équation du second degré $2t^2 - 10t + \frac{25}{2} = 0$ *possède une unique solution qui est* $t = \frac{5}{2}$.
   Ceci prouve que la droite est tangent au cercle
   et que le point de tangence est le point de coordonnées $\boxed{(\frac{5}{2}, 1 - \frac{5}{2}) = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})}$

exemple 3:

Soient $A = (0,1)$ et $B = (2, -3)$.
Donner une équation de la médiatrice du segment $[AB]$

Solution: Notons D la médiatrice du segment $[AB]$

D est la droite qui passe par le point $I = mil[AB]$ et qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$

On a $I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (1, -1)$ *et* $\overrightarrow{AB} = (2, -4)$

- *Une équation cartésienne de D est ainsi* $\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ *ce qui donne* $x - 2y - 3 = 0$
- *Une représentation paramétrique de D est* $\begin{cases} x &= 1 + 1.\lambda \\ y &= -1 - 2.\lambda \end{cases}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$